

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn.

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là hệ số và $a \neq 0$.

2. Cách giải phương trình bậc hai một ẩn có dạng đặc biệt

$$ax^2 + bx = 0; ax^2 + c = 0.$$

Dùng phương pháp đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức để đưa về trái về một bình phương.

- Lưu ý:**
- Nếu $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.
 - Nếu $A^2 = B (B \geq 0)$ thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$.

3. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$.

Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý:

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, với $b = 2b'$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.
- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.
- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Các công thức ở trên gọi là công thức nghiệm thu gọn.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 KHUYẾT

BÀI 1. GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH SAU:

- $2x^2 - \sqrt{2}x = 0$ (1)
- $x^2 - 4 = 0$ (2)
- $3x^2 = 27$ (3)
- $x^2 + 1 = 0$ (4)

BÀI 2. Cho phương trình $x^2 + mx - 35 = 0$.

- a) Tìm m biết rằng phương trình có một nghiệm bằng 7.
- b) Giải phương trình với m vừa tìm được.

BÀI 3. Cho phương trình $x^2 + px + q = 0$. Tìm p, q biết rằng phương trình có hai nghiệm $x = 3$ và $x = 4$

BÀI 4. Tìm p, q để nghiệm của phương trình $x^2 - 4 = 0$ cũng là nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$.

BÀI 5. Giải phương trình.

- a) $x^2 - 5x - 6 = 0$ (1)
- c) $2x^2 - 5x + 2 = 0$
- b) $x^2 + 3x - 4 = 0$ (2)
- d) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

BÀI 6. a) Tìm tọa độ giao điểm của các đồ thị hàm số sau: $y = 4x^2$; $y = 4x + 3$.

b) Tìm m để phương trình $x^2 + 2mx + 1 = 0$ có nghiệm.

BÀI 7. Giải phương trình:

- a) $9x^2 - 30x + 225 = 0$
- b) $(2x - 3)^2 = 11x - 19$
- c) $3(x^2 - 1) = 8x$
- d) $9x^2 - 30x + 25 = 0$
- e) $5x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$

BÀI 8. Giải phương trình:

- a) $(2x + 1)^2 = 8x$ (1)
- b) $(3x - 1)(x + 1) = 15$ (2)
- c) $2x^2 + 3x - (x - 1)(x - 2) = 0$ (3)

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM, CÓ VÔ SỐ NGHIỆM

BÀI 9. a) Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$$x^2 + 2x + m - 2 = 0$$

b) Tìm m để phương trình $mx^2 + (2m - 1)x + m + 2 = 0$ có nghiệm.

c) Tìm m để phương trình $(m - 1)x^2 + (m + 4)x + m + 7 = 0$ có nghiệm duy nhất.

d) Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(m - 1)x + 2 = 0$ có nghiệm kép.

BÀI 10. a) Tìm m để phương trình $x^2 + (2m+1)x + m^2 = 0$ có nghiệm kép và tính nghiệm kép với m vừa tìm được.

b) Chứng minh rằng phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m-1 = 0$ luôn luôn có nghiệm với mọi m .

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA PARABOL $y=ax^2$ ($a \neq 0$) VÀ Đ/T $y = ax+b$ ($a \neq 0$)

BÀI 11. a) Chứng tỏ rằng parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x-1$ tiếp xúc nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm.

b) Cho $(P): y = 2x^2$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(0; -2)$ và tiếp xúc với (P) .

c) Cho parabol $(P): y = \frac{3}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x+m$. Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

BÀI 12. Cho $(P): y = -\frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $(d): y = x-4$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

b) Viết phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và tiếp xúc với (P) .

BÀI 13. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt.

a) $(m+1)x^2 + 4mx + 4m-1 = 0$ (1)

b) $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$ (2)

c) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$ (3)

d) $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m - 1 = 0$ (4)

ĐỊNH LÝ VI-ET VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1) Định lý Vi-et.

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

2) Áp dụng định lý Vi-et để tính nhanh nghiệm.

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$:

*) Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

*) Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

3) Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $x^2 - Sx + P = 0$.

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Biểu thức đối xứng với các nghiệm $(x_1^2 + x_2^2; x_1^3 + x_2^3;)$

Bài 1. Cho phương trình $x^2 - x - 10 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và tính $x_1^2 + x_2^2$.

Chú ý:

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$
 $= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]$
 $= S.(S^2 - 3P) = S^3 - 3SP$
- $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2$
 $= [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2x_1^2x_2^2 = [S^2 - 2P]^2 - 2P^2$
- $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$
 $= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
 $= S^2 - 4P$

Bài 2. Cho phương trình $2x^2 - 3x - 6 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Tính $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^3 + x_2^3$.

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - x + m - 1 = 0$ (*).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$.

b) Hãy tính $x_1^2 + x_2^2$ theo m .

Bài 5. Theo phương trình $3x^2 + 2x - 6 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$; trong đó $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Bài 7. Cho phương trình $x^2 - 2x + m + 2 = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

II. Biểu thức không đối xứng với các nghiệm

Bài 9. Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $3x_1 + 2x_2 = 1$

Hướng dẫn: Biểu thức $3x_1 + 2x_2$ gọi là không đối xứng. Áp dụng hệ thức Viète, tính

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Ta có hệ phương trình, từ đó tìm được m

Bài 10. Tìm m để phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 4$

III. Tính nhẩm các nghiệm của phương trình bậc hai

Bài 11. Giải phương trình:

a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ (1)

b) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ (2)

c) $mx^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0$ (3)

d) $(1-2m)x^2 + (2m+1)x - 2 = 0$ (4)

Bài 12. Giải phương trình:

a) $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$ (1)

b) $mx^2 + 2(m+1)x + m + 2 = 0$ ($m \neq 0$) (2)

c) $(5 + \sqrt{2})x^2 - (\sqrt{2} - 5)x - 10 = 0$ (3)

V. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng

Bài 18. Tìm hai số u và v biết $u+v=1$ và $u \cdot v=-2$.

Hướng dẫn: Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm phương trình bậc hai $x^2 - Sx + P = 0$.

Nhận xét: Ta có thể giải bài toán sau: "Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là -1 và 2 ."

Bài 19. Tìm hai số u, v ; biết $u+v=12$; $uv=28$ và $u > v$.

VII. Biết một nghiệm của phương trình, tìm nghiệm còn lại

Bài 26. Chứng tỏ phương trình $3x^2 + 2x - 21 = 0$ có một nghiệm là -3 .

Tìm nghiệm kia.

Hướng dẫn: Thay $x = -3$ vào phương trình.

Dùng hệ thức: $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ để tìm x_2 ($x_1 = -3$) (hoặc $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$).

Bài 27. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có một nghiệm là 2 . Tìm nghiệm còn lại.

Bài 28. Cho phương trình $4x^2 + 3x + 3m - m^2 = n$ có một nghiệm $x_1 = -2$. Tìm x_2 và m .