

I. GÓC NỘI TIẾP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc ở tâm

1. Khái niệm:

Góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn được gọi là góc ở tâm.

Chú ý: Khi nói đến góc chỉ xét các góc có số đo không vượt quá 180° .

2. Cung. Cung lớn. Cung nhỏ.

Hai điểm B, C nằm trên đường tròn (O) . Phần đường tròn nối liền 2 điểm B, C được gọi là một cung (hay cung tròn) kí hiệu là $\widehat{BC}$.

$\widehat{BmC}$ nằm trong góc $\angle BOC < 180^\circ$ được gọi là cung nhỏ.

$\widehat{BnC}$ không nằm trong góc $\angle BOC < 180^\circ$ được gọi là cung lớn.

3. Số đo cung.

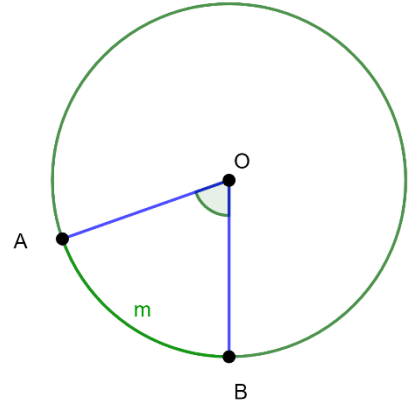
Mỗi cung có một số đo.

Số đo cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn bởi cung đó.

Số đo cung lớn bằng 360° trừ đi số đo cung nhỏ có 2 đầu mút trùng cung lớn.

Số đo của nửa đường tròn là 180° .

Số đo của cung $\widehat{BC}$ được kí hiệu là $s\widehat{BC}$



II. Góc nội tiếp

1. Định nghĩa góc nội tiếp.

- Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

- Cung nằm bên trong góc nội tiếp được gọi là cung bị chắn.

2. Định lý.

Trong một đường tròn số đo của góc nội tiếp bằng một nửa số đo của cung bị chắn.

3. Hệ quả.

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải: Ta thường sử dụng hệ quả

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$, tia phân giác của A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D , Gọi E là giao điểm của BC và AD . Chứng minh rằng

- a) **[NB]** $ABC = ADC$
 b) **[NB]** $\triangle AEB \sim \triangle ACD$
 c) **[TH]** $AB.CD = AD.EB$
 d) **[TH]** $AB.CD + AC.BD = AD.BC$.

Ví dụ 2. Cho (O) có hai dây $MA \perp MB$. Gọi I, K lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ MA, MB

- a) **[NB]** Chứng minh ba điểm A, O, B thẳng hàng
 b) **[TH]** Gọi P là giao điểm của AK và BI . Chứng minh P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MBA .

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(O; R)$ một dây $AB < 2R$. Gọi M là một điểm chính giữa cung nhỏ AB . Kẻ dây MC, MD (biết C, D thuộc cung lớn AB và C nằm trên cung AD) lần lượt cắt AB tại E, F . Chứng minh rằng

- a) **[NB]** $MCA = MAB$
 b) **[TH]** $ME.MC = MA^2$
 c) **[TH]** $ME.MC = MF.MD$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH và nội tiếp đường tròn tâm O , đường kính AM .

- a) **[NB]** Tính $\angle ACM$.
 b) **[NB]** Chứng minh $\angle BAH = \angle OCA$.
 c) **[VD]** Gọi N là giao điểm của AH với (O) . Tứ giác $BCMN$ là hình gì? Vì sao?

Ví dụ 5: Cho (O) , M nằm ngoài đường tròn, kẻ tiếp tuyến MA, MB

- a) **[TH]** biết $\angle AMB = 60^\circ$. Tính số đo $\angle AOB$
 b) **[TH]** Tính số đo của góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA và OB nếu $\angle AMB = 70^\circ$

Ví dụ 6 : Cho (O) , đường kính AB , điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D .

- a) **[NB]** Tính $\angle ADB$?
 b) **[NB]** Tam giác ABE là tam giác gì?
 b) **[TH]** Chứng minh $OD \perp AK$.

Ví dụ 7 : Cho $\triangle ABC$ cân tại B nội tiếp đường tròn (O) . Lấy D thuộc cung AC , đường thẳng BD cắt AC ở N . Chứng minh

- a) **[NB]** $\angle BCA = \angle BDA = \angle BDC = \angle BAC$.
 b) **[NB]** $\frac{AN}{NC} = \frac{AD}{DC}$.
 c) **[TH]** $BC^2 = BD.BN$.

Ví dụ 8 : Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\angle BAC = 60^\circ$. Vẽ đường tròn đường kính BC tâm O cắt AB, AC lần lượt tại D và E .

- a) Tính số đo $\angle DE$.
 b) Tia DO cắt đường tròn tại K . Tính góc $\angle EDK$

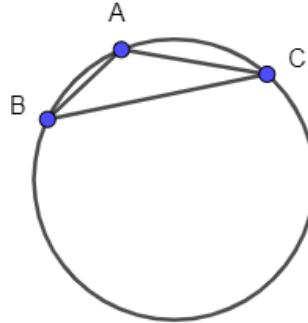
II. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP CỦA MỘT TAM GIÁC

* ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

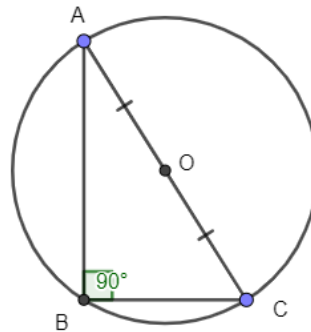
1. Khái niệm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Đường tròn ngoại tiếp một tam giác là đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác đó.



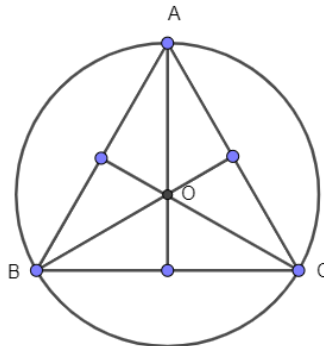
2. Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm của cạnh huyền và bán kính bằng một nửa cạnh huyền.



3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm của tam giác đó và bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}a$



B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

2.1 Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp

Phương pháp giải:

- ☑ **Tam giác thường.** Vẽ hai đường trung trực của tam giác. Giao điểm của hai đường trung trực là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó
- ☑ **Tam giác vuông.** Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền
- ☑ **Tam giác đều.** Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác trùng với trực tâm, trọng tâm, tâm của đường tròn nội tiếp tam giác

Ví dụ 1 [TH]:

Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AH cắt (O) ở D .

- a) Vì sao AD là đường kính của đường tròn (O)
- b) Tính số đo góc ACD
- c) Cho $BC = 24\text{ cm}$, $AC = 20\text{ cm}$. Tính chiều cao AH và bán kính đường tròn (O)

2.2 Dựng hình, chứng minh**Phương pháp giải:**

- ☑ **Dựng hình cần xác định tâm, bán kính**
- ☑ **Sử dụng định lý Pythagore, hệ thức lượng trong tam giác vuông và các tính chất đã học để chứng minh**

BÀI TẬP MẪU**Ví dụ 1 [VD]:**

Cho đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC , tia phân giác của góc BAC cắt đường tròn tại M . Đường cao AH . Chứng minh:

- a) M là trung điểm của dây BC
- b) AM là tia phân giác của góc OAH

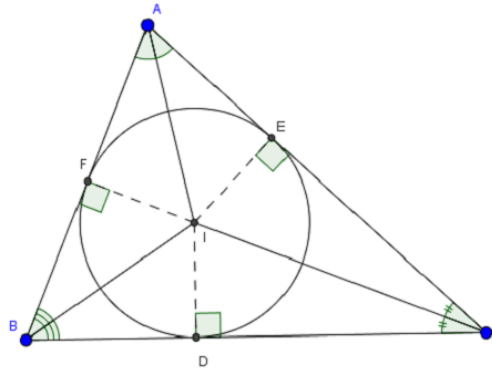
Ví dụ 2 [VD]:

Các đường cao hạ từ A và B của tam giác ABC cắt nhau tại H (góc C khác góc vuông) và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại D và E . Chứng minh:

- a) $CD = CE$
- b) Tam giác BHD cân
- c) $CD = CH$

III. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP CỦA MỘT TAM GIÁC*** ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC.****A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ****1. Khái niệm**

- Đường tròn nội tiếp tam giác là đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của tam giác. Tam giác đó được gọi là tam giác ngoại tiếp đường tròn.



Mở rộng:

a. Mỗi cạnh của tam giác đóng vai trò như một tiếp tuyến đối với đường tròn nội tiếp.

Loại Tam giác	Vị trí tâm đường tròn nội tiếp	Phương trình đường phân giác
Đều	Trung tâm hình	3 đường phân giác đều nhau
Vuông	Điểm nằm trên đường phân giác góc vuông	Phân giác góc vuông dài nhất
Thường	Giao điểm ba đường phân giác	Các đường phân giác khác nhau

b. Đường tròn nội tiếp đa giác là đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của đa giác.

c. Đường tròn bàng tiếp tam giác: Đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC trong góc A là đường tròn tiếp xúc với cạnh BC và tiếp xúc với các tia đối của tia BA và tia CA

2. Cách xác định đường tròn nội tiếp tam giác

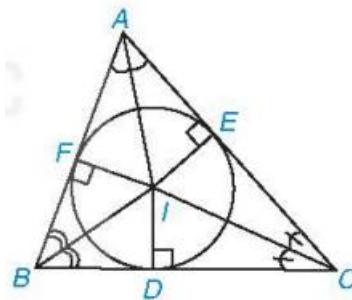
Tâm đường tròn nội tiếp đa giác là giao của các đường phân giác của tất cả các góc trong đa giác.

Để xác định đường tròn nội tiếp đa giác ta làm như sau:

Bước 1: Kẻ các đường phân giác của các góc rồi xác định giao điểm của chúng.

Bước 2: Kẻ đường thẳng đi qua giao điểm và vuông góc với một cạnh bất kỳ để xác định bán kính.

Chú ý: Một tam giác chỉ có đường tròn nội tiếp khi các đường phân giác của các góc của tam giác đồng quy.



Cho tam giác ABC , vẽ phân giác các góc của tam giác, các đường thẳng này đồng quy tại I do đó $(I; ID)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABC với D là hình chiếu của I lên BC .

3. Đường tròn nội tiếp tam giác đều

Đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm của tam giác đó và bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}a$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

- ☑ Để xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , ta cần xác định giao điểm của hai đường phân giác trong bất kỳ. Điểm giao này chính là tâm đường tròn nội tiếp.
- ☑ Tính khoảng cách từ tâm tới một cạnh của tam giác để xác định bán kính của đường tròn nội tiếp. Từ đó, có thể tính được chu vi, diện tích đường tròn và các bài tập liên quan.

IV. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm tứ giác nội tiếp

Tứ giác có 4 đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn và đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

2. Định lý

Trong tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau là 180° .

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

- ☑ **Sử dụng dấu hiệu:** bốn đỉnh của tứ giác cách đều một điểm thì thuộc một đường tròn.
- ☑ **Sử dụng các tính chất hình học:** đường trung trực của đoạn thẳng, tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông, định lý góc ngoài của tam giác,...

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O , đường cao AD cắt đường tròn (O) tại E . Trên cạnh AD lấy điểm H sao cho D là trung điểm của EH , BH cắt AC tại K và cắt (O) tại F . Chứng minh tứ giác $HKCD$ nội tiếp.

Hướng Dẫn: Sử dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông để chứng minh.

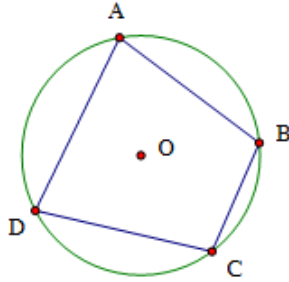
Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên AC lấy điểm D . Hình chiếu của D lên BC là E , điểm đối xứng của E qua BD là F . Chứng minh tứ giác $ABED$ nội tiếp, xác định tâm O của đường tròn đó.

V. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐỂ CHỨNG MINH CÁC QUAN HỆ HÌNH HỌC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Tứ giác có 4 đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn và đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.



Hình 1

Trong Hình 1, tứ giác ABCD nội tiếp (O) và (O) ngoại tiếp tứ giác ABCD.

2. Định lý

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .

3. Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật, hình vuông

- Hình chữ nhật và hình vuông là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

4. Hệ quả: Tứ giác ABCD có hai góc đối bằng nhau và bằng 90° thì tứ giác đó là tứ giác nội tiếp.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp: Sử dụng tính chất của tứ giác nội tiếp

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .
- Tứ giác ABCD có hai góc đối bằng nhau và bằng 90° thì tứ giác đó là tứ giác nội tiếp.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi H là điểm nằm giữa O và B. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Trên cung nhỏ AC lấy điểm E, kẻ $CK \perp AE$ tại K. Đường thẳng DE cắt CK tại F. Chứng minh:

- Tứ giác AHCK là tứ giác nội tiếp;
- $AH \cdot AB = AD^2$;
- Tam giác ACE là tam giác cân.

Ví dụ 2:

Cho nửa (O) đường kính AB. Lấy $M \in OA$ (M không trùng O và A). Qua M vẽ đường thẳng d vuông góc với AB. Trên d lấy N sao cho $ON > R$. Nối NB cắt (O) tại C. Kẻ tiếp tuyến NE với (O) (E là tiếp điểm, E và A cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ d). Chứng minh:

- Bốn điểm O, E, M, N cùng thuộc một đường tròn;
- $NE^2 = NC \cdot NB$;
- $NEH = NME$ (H là giao điểm của AC và d);
- NF là tiếp tuyến (O) với F là giao điểm của HE và (O).

Ví dụ 3:

Cho đường tròn (O) đường kính AB, gọi I là trung điểm của OA, dây CD vuông góc với AB tại I. Lấy K tùy ý trên cung BC nhỏ, AK cắt CD tại H.

- Chứng minh tứ giác BIHK là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $AH \cdot AK$ có giá trị không phụ thuộc vị trí điểm K.

c) Kẻ $DN \perp CB, DM \perp AC$. Chứng minh các đường thẳng MN, AB, CD đồng quy.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tia phân giác góc A cắt đường tròn tại M . Vẽ đường cao AH . Chứng minh rằng:

- OM đi qua trung điểm của dây BC .
- AM là tia phân giác của góc OAH .

Ví dụ 5: Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Vẽ bán kính OC vuông góc AB , gọi M là điểm chính giữa của cung BC , AM cắt OC tại N . Từ C hạ CK vuông góc với AM tại K . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $MNOB$ nội tiếp.
- Tứ giác $OACK$ nội tiếp
- Tam giác OKC cân.
- $AM \cdot AN = 2R^2$

Ví dụ 6: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây CD cố định. Điểm M thuộc tia đối của tia CD . Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (A thuộc cung lớn CD). Gọi I là trung điểm CD . Nối BI cắt đường tròn tại $E (E \neq B)$. Nối OM cắt AB tại H .

- Chứng minh AE song song CD .
- Tìm vị trí của M để $MA \perp MB$
- Chứng minh HB là phân giác của CHD

CHUYÊN ĐỀ: TỔNG HỢP HÌNH HỌC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc nội tiếp

- Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

- Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

2. Đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp của một tam giác

- Đường tròn ngoại tiếp một tam giác là đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác đó. Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm ba đường trung trực của tam giác

- Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm của cạnh huyền và bán kính bằng một nửa cạnh huyền.

- Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm của tam giác đó và bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}a$

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác. Tam giác đó được gọi là ngoại tiếp đường tròn. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm ba đường phân giác của tam giác.

- Đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm của tam giác đó và bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

- Đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC trong góc A là đường tròn tiếp xúc với cạnh BC và tiếp xúc với các tia đối của tia BA và tia CA .

3. Tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (hoặc đơn giản là tứ giác nội tiếp) và đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180° .

- Hình chữ nhật và hình vuông là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

4. Đa giác đều

- Đa giác đều là một đa giác lồi có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.

- Phép quay thuận chiều α° $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ tâm O giữ nguyên điểm O , biến điểm A khác điểm O thành điểm B thuộc đường tròn O ; OA sao cho tia OA quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OB thì điểm A tạo nên cung AB có số đo α° . Định nghĩa tương tự cho phép quay ngược chiều α° tam O . Phép quay 0° và phép quay 360° giữ nguyên mọi điểm.

- Một phép quay được gọi là giữ nguyên một đa giác đều $\mathcal{H}$ nếu phép quay đó biến mỗi điểm của $\mathcal{H}$ thành một điểm của $\mathcal{H}$. Người ta chỉ ra rằng nếu một phép quay biến các đỉnh của đa giác đều $\mathcal{H}$ thành các đỉnh của $\mathcal{H}$ thì phép quay đó giữ nguyên $\mathcal{H}$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI TẬP MẪU

Bài 1: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $AB < AC$, nội tiếp đường tròn O , các đường cao BE, CF cắt nhau ở H .

1 [NB]: Chứng minh tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp.

2 [TH]: Tia EF cắt tia CB tại M . Chứng minh $MF \cdot ME = MB \cdot MC$.

3 [TH]: Tia AH cắt BC tại D . Đường thẳng qua B và song song với AC , cắt tia AD tại P , cắt đoạn thẳng AM tại Q . Chứng minh FC là tia phân giác của góc EFD .

4 [VD]: Chứng minh $BP = BQ$

Bài 2: Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Gọi C là trung điểm của OA , qua C kẻ dây MN của O vuông góc với OA tại C . Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM , H là giao điểm của AK và MN . Tia BK cắt đường thẳng MN tại điểm P

1 [NB]: Chứng minh bốn điểm B, C, H, K cùng thuộc một đường tròn.

2 [TH]: Chứng minh $MHK = ANK$.

3 [TH]: Chứng minh $\triangle AMH$ đồng dạng với $\triangle AKM$.

4 [VD]: Chứng minh $HM \cdot PN = HN \cdot PM$.