

CHUYÊN ĐỀ 3. CĂN BẬC HAI – CĂN BẬC BA

BÀI 7: CĂN BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC HAI

• **Căn bậc hai** của số thực không âm a là số thực x sao cho $x^2 = a$

Nhận xét: Số âm không có căn bậc hai;

Số 0 có một căn bậc hai duy nhất là 0;

Số dương a có đúng hai căn bậc hai đối nhau là $\sqrt{a}$ (căn bậc hai số học của a) và $-\sqrt{a}$

Tính chất của căn bậc hai: $\sqrt{a} = |a|$ với mọi số thực a .

• **Căn thức bậc hai** là biểu thức có dạng $\sqrt{A}$, trong đó A là một biểu thức đại số. A được gọi là biểu thức lấy căn hoặc biểu thức dưới dấu căn.

$\sqrt{A}$ xác định khi A lấy giá trị không âm và ta thường viết là $A \geq 0$. Ta nói $A \geq 0$ là điều kiện xác định (hay điều kiện có nghĩa) của $\sqrt{A}$

Với $A \geq 0$ ta có $\sqrt{A} \geq 0$; $\sqrt{A}^2 = A$; $\sqrt{A^2} = |A|$

BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm căn bậc hai của một số

1. Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

Số	25	0,64	0,01	$\frac{9}{16}$	2	0	-1
Căn bậc hai							
Căn bậc hai số học							

2. Tính căn bậc hai của các số sau

- a) 1; b) 9; c) $\frac{16}{9}$; d) 0,36

3. Tính căn bậc hai số học của các số sau

- a) 0,01; b) 0,04; c) 0,25 d) $\frac{4}{9}$.

4. Tính giá trị biểu thức

$$A = \sqrt{0,09} + 7\sqrt{0,36} - 3\sqrt{2,25}$$

$$B = \sqrt{\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18}$$

Dạng 2: So sánh các căn bậc hai

Với hai số a, b không âm ta có $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

5. So sánh các số sau:

- a) $\sqrt{26}$ và 5; b) $\sqrt{7} + \sqrt{15}$ và 7;
 c) $\sqrt{2} + \sqrt{11}$ và $\sqrt{3} + 5$ d) $-5\sqrt{35}$ và -30.

6. So sánh các số sau:

- a) 6 và $\sqrt{41}$. b) $2\sqrt{27}$ và $\sqrt{147}$.
 c) $-3\sqrt{5}$ và $-5\sqrt{3}$. d) $2\sqrt{2} - 1$ và 2.

7. Cho $a > 0$. Chứng minh rằng

- i) Nếu $a > 1$ thì $a > \sqrt{a}$. ii) Nếu $a < 1$ thì $a < \sqrt{a}$.

Dạng 3: Tìm điều kiện xác định của biểu thức

8. Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{2x-6}$; b) $\sqrt{5-2x}$; c) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

9. Tìm x để căn thức $\sqrt{\frac{1}{x^2-4x+4}}$ có nghĩa.

10. Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{\frac{-9}{2-5x}}$ b) $\sqrt{-\frac{1}{x-1}}$ c) $\sqrt{x^2+2022}$
 d) $\sqrt{\frac{3x-15}{x^2+1}}$ e) $\sqrt{\frac{5-x}{x^2-2x+10}}$

11. Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{x^2-36}$ b) $\sqrt{x-1}$ c) $\sqrt{x^2-8x-9}$ d) $\sqrt{\frac{5+x}{12-x}}$ e) $\sqrt{\frac{2x-1}{5-x}}$

Dạng 4. Rút gọn và biến đổi biểu thức chứa căn bậc hai.

12. Rút gọn biểu thức sau

a) $\sqrt{a^2}$ với $a \leq 0$ b) $\sqrt{a-2^2}$ với $a > 2$
 c) $\sqrt{49a^2} + 3a$ với $a \geq 0$ d) $3\sqrt{9a^6} - 6a^3$ với $a \leq 0$

13. Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{x^2-7}{x+\sqrt{7}}$ với $x \neq -\sqrt{7}$ b) $\frac{x-10\sqrt{x}+25}{x-25}$ với $x \geq 0; x \neq 25$
 c) $\frac{x+6\sqrt{x}+9}{x-9} \sqrt{x-3}$ với $x \geq 0; x \neq 9$ d) $\frac{x^2-2\sqrt{13}x+13}{x^2-13}$ với $x \neq \pm\sqrt{13}$

14. Rút gọn các phân thức sau

a) $\frac{x^2-5}{x+\sqrt{5}}$ với $x \neq -\sqrt{5}$ b) $\frac{x-10\sqrt{x}+25}{x-25}$ với $x \geq 0; x \neq 25$
 c) $\frac{x+6\sqrt{x}+9}{x-9} \sqrt{x-3}$ với $x \geq 0; x \neq 9$ d) $\frac{4x^2-4\sqrt{3}x+3}{4x^2-3}$ với $x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
 e) $\frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$ f) $\frac{x-8\sqrt{x}+15}{x-4\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0; x \neq 25$

15. Hãy viết các biểu thức sau thành bình phương của biểu thức khác:

a) $4-2\sqrt{3}$ b) $7+4\sqrt{3}$ c) $13-4\sqrt{3}$ d) $19+6\sqrt{2}$

16. Phân tích thành nhân tử (với x không âm)

a) x^2-3 b) $x^2+2\sqrt{3}x+3$ c) $9x-12\sqrt{x}+4$ d) $4x^2-4\sqrt{5}x+5$
 e) $x\sqrt{x}-1$ f) $x\sqrt{x}+8$ g) $x\sqrt{x}-\sqrt{x}$ h) $x+2\sqrt{x}-8$ (2 cách)

Dạng 5. Tìm x

17. Tìm x thỏa mãn:

a) $\sqrt{x} = -2018$. b) $\sqrt{x+1} - 1 = 2$.

c) $2\sqrt{3x} = 12$

d) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2$

18. Tìm x thỏa mãn

a) $\sqrt{x^2 + 5x + 20} = 4.$

b) $3 - \sqrt{x^2 + 5} = 4.$

19. Tìm số thực x thỏa mãn:

a) $\sqrt{-2x^2 - 9} = 2;$

b) $\sqrt{x^2 + 1} + 2 = 0.$

c) $\sqrt{3x - 1} = 4$

d) $\sqrt{-3x + 4} = 12;$

e) $\sqrt{x - 7} \cdot \sqrt{x + 7} = 2;$

f) $\sqrt{9x - 1} - 19 = 2.$

Dạng 6. Rút gọn biểu thức dạng $\sqrt{A^2}$
20. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{13 + 4\sqrt{3}} + 2\sqrt{7 - 4\sqrt{3}};$

b) $\sqrt{10} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}}.$

22. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}.$

b) $\sqrt{12 + 3\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}.$

23. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\frac{1}{2}\sqrt{12 - 8\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} - 4\sqrt{2}.$

b) $\sqrt{10 + 4\sqrt{6}}$

c) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{4 - \sqrt{15}}} + 6\sqrt{\frac{1}{3}}.$

24. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{4x^2 - 1}$ với $x > \frac{-1}{2};$

b) $9 + x + \sqrt{4 - 4x + x^2}$ với $x < 2$

25. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{a - b}$ với $a \neq b;$

b) $\frac{2}{x - 1} \cdot \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 1}{4x^2}}$ với $0 < x < 1.$

26. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{x^4 - 4x^2 + 4} - x^2;$

c) $\frac{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}}{x + 1}$ với $x > 1.$

Dạng 7. Giải bất phương trình
27. Tìm giá trị của x , biết:

a) $\sqrt{2x} < \frac{1}{3}$

b) $\sqrt{-3x + \frac{1}{2}} \geq 5$

c) $\sqrt{-2x + 1} > 7$

d) $\sqrt{2x - 1} \leq \frac{3}{2}$

e) $\sqrt{x} < 3$

f) $\sqrt{3x} < 9$

Bài tập tự luyện
Bài 1: Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{(4 - 3\sqrt{2})^2}$

b) $\sqrt{(2 + \sqrt{5})^2}$

c) $\sqrt{(4 + \sqrt{2})^2}$

d) $2\sqrt{3} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$

e) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$

f) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$

g) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$

h) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}$

Bài 2: Thực hiện các phép tính.

a) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$

b) $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$

c) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

d) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$

e) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}$

f) $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$

Bài 3: Tính

$$A = \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$$

$$B = \sqrt{8-2\sqrt{7}} - \sqrt{8+2\sqrt{7}}$$

$$C = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$D = \sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{8+2\sqrt{15}}$$

$$E = \sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}};$$

$$F = \sqrt{9-4\sqrt{2}} - \sqrt{11+6\sqrt{2}};$$

$$G = \sqrt{12+8\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$$

$$H = \sqrt{41-12\sqrt{5}} - \sqrt{41+12\sqrt{5}}$$

BÀI 8:
KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA
• Khai căn bậc hai và phép nhân

 Với A, B là các biểu thức không âm, ta có $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$

Chú ý: Kết quả trên có thể mở rộng cho nhiều biểu thức không âm, chẳng hạn:

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \cdot \sqrt{C} = \sqrt{A \cdot B \cdot C} \text{ với } A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0$$

• Khai căn bậc hai và phép chia

 Với A, B là các biểu thức với $A \geq 0, B \geq 0$, thì $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$
BÀI TẬP
A. KHAI CĂN BẬC HAI VÀ PHÉP NHÂN
Dạng 1. Khai căn một tích, nhân các căn bậc hai
1. Tính

a) $\sqrt{27 \cdot 75};$

b) $\sqrt{200 \cdot 18};$

c) $\sqrt{160 \cdot 12 \cdot 1};$

d) $\sqrt{3 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 6};$

2. Tính

a) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{180};$

b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{105};$

c) $\sqrt{250} \cdot \sqrt{0,9};$

d) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{162};$

3. Tính

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

b) $\sqrt{3 \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{3 \frac{3}{7}} \cdot \sqrt{12};$

c) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{50}$

d) $\sqrt{12 \cdot 8} \cdot \sqrt{0,2}$

e) $\sqrt{40} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{4,5};$

f) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$

4. Tính

a) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{50}{3}} - \sqrt{24} \right) \cdot \sqrt{6}$

b) $\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2}$

c) $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{4}{3}} \right) \cdot \sqrt{12}$

d) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{8}$

5. Tính

a) $\sqrt{55.77.35}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{125} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$

c) $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}$

d) $2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}-2) + (1+2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}$

6. Khai triển biểu thức sau

a) $\sqrt{7} + \sqrt{3}^2$

b) $\sqrt{8} - \sqrt{2}^2$

c) $\sqrt{27} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} - \sqrt{3}$

d) $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-3}$

Dạng 2: Rút gọn biểu thức, tính giá trị của biểu thức

7. Tính

a) $\sqrt{10,6^2 - 5,6^2}$;

d) $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} \quad 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt{29+12\sqrt{5}} + \sqrt{29-12\sqrt{5}}$;

e) $\left(\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}} \right)^2$

c) $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{26}}{2\sqrt{5} + \sqrt{52}}$;

f) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}$

8. Chứng minh:

a) $2 - \sqrt{3} \quad 2 + \sqrt{3} = 1$

b) $\sqrt{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9+\sqrt{17}} = 8$

c) $\sqrt{2014} - \sqrt{2013} \cdot \sqrt{2014} + \sqrt{2013} = 1$

d) $2\sqrt{2} \sqrt{3-2} + 1 + 2\sqrt{2}^2 - 2\sqrt{6} = 9$

9. Dùng hằng đẳng thức, rút gọn biểu thức sau:

a) $\sqrt{41^2 - 40^2}$;

b) $\sqrt{3} - \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{7}$

c) $2\sqrt{5} - \sqrt{8} \cdot 2\sqrt{5} + \sqrt{8}$

d) $1 + \sqrt{3} - \sqrt{5} \quad 1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

e) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$;

f) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$;

g) $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$

h) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

i) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

j) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

k) $\sqrt{7-2\sqrt{10}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}$

10. Rút gọn các biểu thức

a) $A = \sqrt{(a-1)^2(2a+1)^2}$ với $a > 1$;

b) $B = \sqrt{(b-1)(b+7)+16}$ với $b < -3$;

c) $C = \sqrt{c^2+10c+25} - \sqrt{c^2-10c+5}$ với $-5 \leq c \leq 5$;

d) $D = \frac{1-d}{\sqrt{d^2-2d+1}} + \frac{\sqrt{d^2-4d+4}}{d-2}$ với $d > 2$

11. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = x + 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$, $x \leq 3$;

b) $B = |x-2| + \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$, $x < 2$

c) $C = \sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2}$, $-2 \leq x \leq 0$.

d) $D = 2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$.

Dạng 3: Phân tích thành nhân tử

12. Phân tích thành nhân tử (với điều kiện các biểu thức dưới dấu căn đều có nghĩa)

- a) $3 - \sqrt{3}$; b) $5 + \sqrt{5}$ c) $a - \sqrt{a}$
 d) $x + 3\sqrt{xy}$; e) $\sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2}$; f) $\sqrt{x^3} - 25\sqrt{x}$

13. Phân tích các biểu thức sau thành nhân tử.

- a) $A = \sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 4x}$ với $x > 4$
 b) $B = \sqrt{x^3 - 8} + \sqrt{x(x+2)+4}$ với $x > 2$;
 c) $C = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} - \sqrt{4x^2 + 4x}$ với $x > 0$.

14. Phân tích thành nhân tử bằng phương pháp nhóm các số hạng hoặc thêm bớt

- a) $x - \sqrt{x} - \sqrt{xy} + \sqrt{y}$ b) $\sqrt{ax} - \sqrt{by} - \sqrt{ay} + \sqrt{bx}$
 c) $\sqrt{x^2 - 9} - 2\sqrt{x - 3}$ d) $x - 3\sqrt{x} + 2$.
 e) $x - \sqrt{x} - 6$; f) $x + \sqrt{x} - 12$

B. KHAI CĂN BẬC HAI VÀ PHÉP CHIA

Dạng 4: Thực hiện phép tính

15. Tính:

- a) $A = \sqrt{\frac{49}{81}}$ b) $B = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ c) $C = \sqrt{98} : \sqrt{2}$;
 d) $D = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{5} : \sqrt{15}$; e) $E = \sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{3} : \sqrt{3}$;

16. Tính

- a) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{75}}$; c) $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}} : \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$

17. Thực hiện phép tính

- a) $\sqrt{54} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ b) $(\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{20}) : \sqrt{5}$;
 c) $(2\sqrt{18} + 3\sqrt{8} - 6\sqrt{2}) : \sqrt{2}$.
 d) $\sqrt{\frac{11}{9} : 1,44} - \frac{7}{9} : 1,44$.
 e) $\sqrt{36 - 12\sqrt{5}} : \sqrt{6}$ f) $\frac{\sqrt{3^{16} - 3^{12}}}{\sqrt{3^{12} - 3^8}}$

Dạng 5: Rút gọn biểu thức

18. Rút gọn các biểu thức:

- a) $A = \sqrt{\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{\frac{a^6}{b^3}}$, với $b > 0$; b) $B = b^5 \sqrt{\frac{a^2 + 6a + 9}{b^8}}$.
 c) $C = \sqrt{\frac{x-1}{16}}$ với $x \geq 1$; d) $D = \sqrt{\frac{x^4}{a-1}}$ với $a < 1$.

19. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\frac{\sqrt{27x-5}}{\sqrt{3}}$ với $x \geq 5$; b) $\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{9x-4}}$ với $x < 4$.

c) $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}$ với $x \geq 0$;

d) $\sqrt{\frac{x-2^4}{3-x^2}} + \frac{x^2-1}{x-3}$ với $x < 3$;

20. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0,01}$;

b) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$;

c) $\sqrt{\frac{149^2 - 7^2}{457^2 - 384^2}}$.

Dạng 6. Toán thực tế

21. Trong vật lí, ta có định lí Joule – Lenz để tính nhiệt lượng tỏa ra ở dây dẫn khi có dòng điện chạy qua: $Q = I^2 R t$

Trong đó:

+ Q là nhiệt lượng tỏa ra trên dây dẫn tính theo Jun J

+ I là cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn tính theo Ampe A

+ R là điện trở dây dẫn tính theo Ohm Ω

+ t là thời gian dòng điện chạy qua dây dẫn tính theo giây.

Áp dụng công thức trên để giải bài toán sau: Một bếp điện khi hoạt động bình thường có điện trở $R = 80\Omega$. Tính cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn, biết nhiệt lượng mà dây dẫn tỏa ra trong 1 giây là $500 J$.

22. Kích thước màn hình ti vi hình chữ nhật được xác định bởi độ dài đường chéo. Một loại ti vi có tỉ lệ hai cạnh màn hình là $4 : 3$

a) Gọi x inch là chiều rộng của màn hình ti vi. Viết công thức tính độ dài đường chéo d inch của màn hình ti vi theo x

b) Tính chiều rộng và chiều dài (theo centimét) của màn hình ti vi loại 60 inch

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tính:

a) $\sqrt{0,04.25}$

b) $\sqrt{4.1,44.225}$

c) $\sqrt{2500 \cdot 4,9 \cdot 0,9}$

d) $\sqrt{2^4 \cdot (-3)^2}$

Bài 2: Tính:

a) $-0,8\sqrt{(-0,125)^2}$;

b) $\sqrt{(-2)^6}$

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

d) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$

e) $\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2})^2}$

f) $\sqrt{(0,1 - \sqrt{0,1})^2}$

Bài 3: Tính:

a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$

b) $\sqrt{17^2 - 8^2}$

c) $\sqrt{117^2 - 108^2}$

d) $\sqrt{313^2 - 312^2}$

a) $\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

c) $(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}})^2$

d) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot (1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$

Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{0,16a^2}$ với $a < 0$

b) $\sqrt{\frac{3x}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5x}{27}}$ với $x > 0$;

c) $\sqrt{x^6 \cdot (x-2)^2}$ với $x > 2$

d) $\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0, y \neq 0$

Bài 6: Rút gọn các biểu thức:

a) $\sqrt{4(a-3)^2}$ với $a \geq 3$;

b) $\sqrt{9(b-2)^2}$ với $b < 2$;

c) $\sqrt{a^2(a+1)^2}$ với $a > 0$;

d) $\sqrt{b^2(b-1)^2}$ với $b < 0$.

e) $\sqrt{x-3} \sqrt{x+3}$;

f) $\sqrt{x} - \sqrt{y} \sqrt{x} + \sqrt{y}$ với $x, y \geq 0$;

Bài 7: Rút gọn biểu thức sau (loại bỏ dấu căn và dấu trị tuyệt đối):

a) $\sqrt{0,36x^2}$ với $x < 0$

b) $x\sqrt{5}$ với $x \geq 3$

c) $\sqrt{27.48(1-x)^2}$ với $x > 1$

d) $\frac{1}{x-y} \cdot \sqrt{x^4(x-y)^2}$ $x > y > 0$

e) $\sqrt{4.(x-3)^2}$ với $x \geq 3$

f) $\sqrt{9.(x-2)^2}$ với $x < 2$

h) $\sqrt{x^2(x-1)^2}$ với $x < 0$

i) $\sqrt{\frac{2x}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3x}{8}}$ với $x \geq 0$

j) $\sqrt{13x} \sqrt{\frac{52}{x}}$ với $x > 0$

k) $6\sqrt{\frac{1}{2}}$ với x bất kỳ

g) $\left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = -2$ với $x > 0$

m) $(3-x)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180x^2}$,

Bài 8: Phân tích thành nhân tử

a) $a - 5\sqrt{a}$;

b) $a - 7$ với $a > 0$;

c) $a + 4\sqrt{a} + 4$;

d) $\sqrt{xy} - 4\sqrt{x} + 3\sqrt{y} - 12$.

BÀI 9.1: BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI
• Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

 Nếu a là một số và b là một số không âm thì $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$
• Đưa thừa số vào trong dấu căn

 Nếu a và b là một số không âm thì $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$

 Nếu a là số âm và b là số không âm thì $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$
• Trục căn thức ở mẫu

 Với các biểu thức A, B và $B > 0$, ta có $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.

 Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$; $A \neq B^2$ ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A+B}} = \frac{C \cdot \sqrt{A-B}}{A-B^2}; \frac{C}{\sqrt{A-B}} = \frac{C \cdot \sqrt{A+B}}{A-B^2}$$

 Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$; $B \geq 0$ $A \neq B^2$ ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A+\sqrt{B}}} = \frac{C \cdot \sqrt{A-\sqrt{B}}}{A-B}; \frac{C}{\sqrt{A-\sqrt{B}}} = \frac{C \cdot \sqrt{A+\sqrt{B}}}{A-B};$$

• Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Khi rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai, ta cần phối hợp các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia) và các phép biến đổi đã học (đưa thừa số ra ngoài dấu căn hoặc trong dấu căn, khử mẫu của biểu thức lấy căn, trục căn thức ở mẫu)

BÀI TẬP
Dạng 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn
1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{25.90}$ b) $\sqrt{96.125}$ c) $\sqrt{75.54}$ d) $\sqrt{245.35}$

2. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{54}$ b) $\sqrt{108}$ c) $0,1\sqrt{20000}$ d) $-0,05\sqrt{28800}$

3. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{8x^2}$ với $x \geq 0$; b) $\sqrt{27xy^2}$ với $x \geq 0; y \leq 0$
 c) $\sqrt{25x^3}$ với $x > 0$; d) $\sqrt{48x-1}^2 y^4$ với $x < 1, y \in \mathbb{R}$

4. Rút gọn biểu thức:

a) $A = 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 3\sqrt{48}$. c) $C = 3\sqrt{2} \cdot 4 - \sqrt{2} + 3 \cdot 1 - 2\sqrt{2}^2$.
 b) $B = \sqrt{147} + \sqrt{75} - 4\sqrt{27}$. d) $D = 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$.

5. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 5\sqrt{4x} - 3\sqrt{\frac{100x}{9}} - \frac{4}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}}$ với $x > 0$;
 b) $B = \frac{1}{3}\sqrt{9+6y+y^2} + \frac{4y}{3} + 5$ với $y \leq -3$

Dạng 2: Đưa thừa số vào trong dấu căn
6. Đưa thừa số vào trong dấu căn.

a) $3\sqrt{5}$ b) $-5\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{2}$

7. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $a\sqrt{11}$ với $a \geq 0$; b) $a\sqrt{\frac{-23}{a}}$ với $a < 0$.
 c) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{12}{a}}$ với $a > 0$; d) $a-2\sqrt{3}$ với $a < 2$.

Dạng 3: So sánh các căn bậc hai
8. So sánh các cặp số dưới đây:

a) $2\sqrt{29}$ và $3\sqrt{13}$; b) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

9. Tìm số bé hơn trong các cặp số sau:

a) $5\sqrt{2}$ và $4\sqrt{3}$ b) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{37}}$

10. Sắp xếp các cặp số sau theo thứ tự tăng dần:

a) $3\sqrt{5}; 2\sqrt{6}; \sqrt{29}$ và $4\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{2}; \sqrt{39}; 3\sqrt{8}$ và $2\sqrt{15}$.

11. Sắp xếp các cặp số sau theo thứ tự giảm dần:

- a) $7\sqrt{2}; 2\sqrt{8}; \sqrt{28}$ và $5\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{10}; 5\sqrt{3}; \frac{20}{\sqrt{5}}$ và $12\sqrt{\frac{2}{3}}$.

12. So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

- a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{3} + 2$ và $\sqrt{2} + \sqrt{6}$
 c) 16 và $\sqrt{15} \cdot \sqrt{17}$ d) 8 và $\sqrt{15} + \sqrt{17}$

Dạng 4: Khử mẫu trong dấu căn

13. Khử mẫu biểu thức lấy căn

- a) $\sqrt{\frac{5}{2}}$; b) $\sqrt{\frac{5}{14}}$;
 c) $\sqrt{\frac{3m}{5n}}$ với $m, n > 0$; d) $\sqrt{\frac{7x}{18y}}$ với $x, y > 0$.

14. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

- a) $\sqrt{\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}}$ với $x > -1$; b) $\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3}}$, với $a > 0$ hoặc $a \geq 1$.

15. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

- a) $-x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}$ với $x > 0; y \geq 0$; b) $\sqrt{\frac{-2x}{15}}$ với $x < 0$;
 c) $\sqrt{\frac{5x}{13y}}$ với $x \geq 0; y > 0$; d) $\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}$ với $x \geq \frac{1}{2}$.

Dạng 5: Trục căn thức ở mẫu

16. Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau

- a) $\frac{3 + \sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$; b) $\frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 1}$; c) $\frac{3\sqrt{5} + \sqrt{15}}{\sqrt{5}}$; d) $\frac{1}{2 - 3\sqrt{3}}$

17. Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau, với các biểu thức đều có nghĩa.

- a) $\frac{1}{\sqrt{m} + n}$; b) $\frac{2}{\sqrt{m} - \sqrt{n}}$; c) $\frac{3}{2\sqrt{m} + 1}$; d) $\frac{2ab}{2\sqrt{a} + 3\sqrt{b}}$;

18. Trục căn thức ở mẫu và rút gọn

- a) $\frac{1}{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}}$ c) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ d) $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$

19. Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau

- a) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}$ b) $\frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{6 + \sqrt{35}}}$

20. Trục căn thức ở mẫu

- a) $A = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} - \sqrt{7}}$; b) $B = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$; c) $C = \frac{1}{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$

Bài tập tự luyện

Bài 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

- a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt{2400}$ c) $\sqrt{147}$ d) $\sqrt{1,25}$ e) $\sqrt{12}$

Bài 2. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

- a) $\sqrt{27x^2}$ $x \geq 0$ b) $\sqrt{8xy^2}$ $x \geq 0; y \leq 0$
 c) $\sqrt{25x^3}$ $x > 0$ d) $\sqrt{48xy^4}$ $x \geq 0; y \in R$
 e) $\sqrt{48y^4}$ f) $\sqrt{8y^2}$ với $y > 0$

Bài 3. Rút gọn biểu thức

- a) $A = \sqrt{28} + \sqrt{63} - 2\sqrt{7}$ b) $B = 3\sqrt{2} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$
 c) $C = \sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 5\sqrt{48}$ d) $D = 3\sqrt{a^2 + 3} - 3\sqrt{16a^2 + 48} + 4\sqrt{25a^2 + 75}$.

Bài 4. Đưa thừa số vào trong dấu căn

- a) $3\sqrt{5}$; b) $5\sqrt{6}$; c) $\frac{2}{7}\sqrt{35}$; d) $-4\sqrt{\frac{1}{8}}$; e) $-0,06\sqrt{250}$.

Bài 5. Đưa thừa số vào trong dấu căn

- a) $-\frac{2}{3}\sqrt{xy}$ b) $x\sqrt{5}$ với $x \geq 0$ c) $x\sqrt{13}$ với $x < 0$ d) $x\sqrt{\frac{2}{x}}$ với $x > 0$
 e) $a\sqrt{13}$ $a \geq 0$ f) $a\sqrt{\frac{-15}{a}}$ $a < 0$ g) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{12}{a}}$ $a > 0$ h) $a\sqrt{2}$ $a \leq 0$

Bài 6. So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

- a) $3\sqrt{3}$ và $\sqrt{12}$ b) 20 và $3\sqrt{5}$
 c) $\frac{1}{3}\sqrt{54}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{150}$ d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}}$

Bài 7. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần

- a) $6\sqrt{3}, 7\sqrt{2}, 15\sqrt{\frac{2}{5}}, 9\sqrt{1\frac{2}{9}}$; b) $-\sqrt{71}, \frac{2}{3}\sqrt{12}, \frac{1}{2}\sqrt{21}, -5\sqrt{3}$.

Bài 8. Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn (giả thiết rằng các biểu thức đã cho có nghĩa):

$$\sqrt{\frac{1}{600}}; \quad \sqrt{\frac{11}{540}}; \quad \sqrt{\frac{3}{50}}; \quad \sqrt{\frac{5}{98}}; \quad \sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}.$$

Bài 9. Khử mẫu của mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai sau

- a) $\sqrt{\frac{5x^3}{49y}}$ $x \geq 0; y > 0$ b) $7xy\sqrt{\frac{-3}{xy}}$ $x < 0; y > 0$
 c) $\sqrt{\frac{5b}{49a^3}}$ $a > 0, b \geq 0$ d) $\frac{-1}{4}ab\sqrt{\frac{16}{ab}}$ $a < 0, b < 0$

Bài 10. Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau:

- a) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ b) $\frac{3}{\sqrt{15}+4}$; c) $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$; d) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$;
 e) $\frac{5}{2+\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; g) $\frac{7}{3-\sqrt{2}}$; h) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

BÀI 9.2: BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

• Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Khi rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai, ta cần phối hợp các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia) và các phép biến đổi đã học (đưa thừa số ra ngoài dấu căn hoặc trong dấu căn, khử mẫu của biểu thức lấy căn, trục căn thức ở mẫu)

BÀI TẬP

Dạng 1. Rút gọn biểu thức không chứa biến

1. Rút gọn các biểu thức sau.

a) $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}.$

b) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}.$

c) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}.$

d) $0,1.\sqrt{200} + 2.\sqrt{0,08} + 0,4.\sqrt{50}.$

2. Rút gọn các biểu thức sau.

a) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}.$

b) $\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7} \sqrt{7} + \sqrt{84}$

c) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120};$

d) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200}\right) : \frac{1}{8}$

3. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}};$

b) $B = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}.$

c) $C = \sqrt{127 - 48\sqrt{7}} - \sqrt{127 + 48\sqrt{7}}.$

d) $D = \sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$

Dạng 2 : Chứng minh đẳng thức

4. Chứng minh đẳng thức

a) $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}$

b) $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ với $a > 0, b > 0.$

5. Chứng minh các đẳng thức (với a, b không âm và $a \neq b$)

a) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b - a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.$

b) $\left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}\right)^2 = 1$

6. Chứng minh các đẳng thức sau.

a) $\left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a}\right)^2 = 1$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$

b) $\frac{a + b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2 b^4}{a^2 + 2ab + b^2}} = |a|$ với $a + b > 0$ và $b \neq 0$

Dạng 3. Rút gọn, tính giá trị biểu thức khi biết giá trị của biến

7. Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a + 1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A khi $a = 2021 - 2\sqrt{2020}$

8. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + \sqrt{3}x + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}}\right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1\right)$

a) Rút gọn A

b) Tính giá trị của A khi $x = \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29} - 12\sqrt{5}}$

9. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-9}{x-9}\right)$

a) Rút gọn A

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}-1}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$

10. Cho biểu thức $P = \frac{a\sqrt{b} + \sqrt{a} - b\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1 + \sqrt{ab}}$ với a, b là hai số thực dương

a) Rút gọn biểu thức $P : \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} \quad a + b}$

b) Xác định giá trị của biểu thức P khi $a = 2019 + 2\sqrt{2018}$ và $b = 2020 + 2\sqrt{2019}$

11. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}}\right) : \left(1 + \frac{x+y+2xy}{1-xy}\right)$ với $x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của biểu thức P với $y = 9 + 4\sqrt{5}$

12. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a - 1}\right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right)$ với $0 \leq a \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A, biết $\frac{a}{4+2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

Dạng 4. Rút gọn, giải phương trình.

13. Cho biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1}\right) \left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}\right)$

a) Rút gọn biểu thức Q

b) Tìm các giá trị của x để $Q = -1$

14. Cho biểu thức $P_x = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P_x

b) Tìm x để $P_x = x + 1$

15. Cho $A = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$; $B = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x} + 2x + 2}{\sqrt{x} + 2}$. Tìm x sao cho $A = B$

16. Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$

a) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa và rút gọn A

b) Tìm x để biểu thức A nhận giá trị bằng 2

17. Cho $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P = \frac{2}{7}$

c) So sánh $2P$ và P^2

Dạng 5. Rút gọn, giải bất phương trình

18. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-3}{x+2\sqrt{x}+4} - \frac{7\sqrt{x}+10}{x\sqrt{x}-8} \right) : \frac{\sqrt{x}+7}{x+2\sqrt{x}+4}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x sao cho $A < 2$

19. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Chứng minh $P > 1$

20. Cho biểu thức $A = \left(\frac{3x+\sqrt{16x}-7}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định của A

b) Tính giá trị của A khi $\frac{x}{9} = \frac{2\sqrt{27}+7\sqrt{5}}{\sqrt{10}+7\sqrt{2}}$

c) Cho $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \cdot A$. Tìm x để $P < 0$

Dạng 6. Rút gọn, tìm điều kiện của ẩn để biểu thức đạt giá trị nguyên.

Lưu ý: Tìm x nguyên để A nguyên và tìm x để A nguyên là hai dạng với hai cách làm khác nhau.

21. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$ với $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 100$
 b) Rút gọn biểu thức B
 c) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $M = A : B$ có giá trị nguyên

22. Cho biểu thức $P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}}$ $x \geq 0; x \neq 1$

- a) Rút gọn biểu thức P
 b) Tìm tất cả các giá trị x nguyên dương để P nhận giá trị nguyên.

23. Cho biểu thức $A = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{1 - \sqrt{x}}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

- a) Rút gọn biểu thức A
 b) Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

24. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x} - 2} + \frac{3}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{5\sqrt{x} - 7}{2x - 3\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{2\sqrt{x} + 3}{5x - 10\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 4$

- a) Rút gọn biểu thức A .
 b) Tìm x sao cho A nhận một giá trị nguyên.

25. Cho biểu thức $P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{1 + 2x - 2\sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}}$, với $x > 0; x \neq 1$

- a) Rút gọn biểu thức P
 b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên

26. Cho biểu thức $P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x}}{3x + 2\sqrt{x}} - \frac{9x + \sqrt{x} + 1}{3x - \sqrt{x} - 2} \right) : \frac{3\sqrt{x} + 1}{7x - 7\sqrt{x}}$ ($x > 0; x \neq 1$)

- a) Rút gọn biểu thức P
 b) Tìm x sao cho P nhận giá trị là một số nguyên.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} + \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{3 - \sqrt{x}} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức A
 b) Tính giá trị của A , biết $x = 4$

Bài 2: Cho biểu thức $A = \frac{x + 1 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

- a) Tìm x để A có nghĩa.
 b) Rút gọn biểu thức A .
 c) Với giá trị nào của x thì $A < 1$?

Bài 3: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$

- a) Rút gọn biểu thức A ; b) Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{3}$

Bài 4: Cho $A = \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{3\sqrt{x} + 5}{x\sqrt{x} - x - \sqrt{x} + 1} \right) \left(\frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{4\sqrt{x}} - 1 \right)$

- a) Rút gọn biểu thức A

b) Đặt $B = x - \sqrt{x} + 1$. Chứng minh $B > 1$ với $x > 0, x \neq 1$

Bài 5: Cho biểu thức $P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 3}{3 + \sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P là một số nguyên.

Bài 6: Cho biểu thức $P = \frac{1}{x+5} + \frac{2}{x-5} - \frac{2x+10}{x+5} \cdot \frac{1}{x-5}$.

a) Tìm điều kiện xác định của P .

b) Rút gọn biểu thức P .

c) Tìm giá trị của P tại $x = 1$.

d) Tìm giá trị của x để $P = 2$.

e) Cho $P = -3$. Tính giá trị của biểu thức $Q = 9x^2 - 42x + 49$

Bài 7: Cho biểu thức $P = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}$.

a) Tìm điều kiện xác định của P .

b) Rút gọn biểu thức P .

c) Tìm x để $P = \frac{-3}{4}$.

d) Tìm các giá trị nguyên của x để P cũng có giá trị nguyên.

e) Tính giá trị của biểu thức P khi $x^2 - 9 = 0$.

BÀI 9.3: DẠNG TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

Phương pháp giải

└ Xác định điều kiện phương trình.

└ Dùng các hằng đẳng thức và tính chất của dấu giá trị tuyệt đối.

└ Phân tích đa thức thành nhân tử.

Một số công thức cần lưu ý.

$$\sqrt{A^2} = |A|$$

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A < 0 \\ A = -B \end{cases}$$

$$A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$$

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} B \geq 0 \\ A = -B \end{cases}$$

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$|A| + |B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Dạng 1.

1. Giải phương trình

a) $\sqrt{x^2} = 1$.

b) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3$.

2. Giải phương trình: $\sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4$ (1)

3. Giải phương trình: $25\sqrt{\frac{x-3}{25}} - 7\sqrt{\frac{4x-12}{9}} - 7\sqrt{x^2-9} + 18\sqrt{\frac{9x^2-81}{81}} = 0 \quad (2)$

4. Tìm x thỏa mãn

a) $\sqrt{\frac{x-1}{x^2-2x+1}} = 2;$

b) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-x}} = 3$

5. Giải các phương trình sau.

a) $\sqrt{x-1}^2 = 3-x$

c) $\sqrt{x^2-4x+3} = x-3$

b) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x}$

d) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 0$

6. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2+x} = x-1;$

d) $\sqrt{x^2-3} = 0;$

b) $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{4x};$

e) $2 - \sqrt{x^2-2} = 0$

c) $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} = 27 - 3\sqrt{3x};$

f) $x + \sqrt{3x+10} = 0$

7. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{3} = 0$

d) $\sqrt{2x^2-2x\sqrt{6}+3} - \sqrt{5-\sqrt{24}} = 0$

b) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x-5} = 0$

e) $\sqrt{25x+25} - \sqrt{16x+16} = 12 - \sqrt{4x+1}$

c) $\sqrt{x^2+4x} - \sqrt{\frac{x^2}{2}} - 8 = 0$

8. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2-9} - \sqrt{x-3} = 0$

b) $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$

c) $\frac{3}{2}\sqrt{4x-8} - 9\sqrt{\frac{x-2}{81}} = 6$

9. Tìm x thỏa mãn

a) $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2;$

b) $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3x-4}} = 1.$

Giải phương trình chứa căn bậc ba:

11. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+7} - 3 = 1$

12. Giải phương trình

a) $\sqrt[3]{2x+1} = 3;$

b) $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x^2-1}$