

Bài 5. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Bất đẳng thức

Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b, a \geq b, a \leq b$) là bất đẳng thức và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.

Tính chất bắc cầu: Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$.

2. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Khi cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

3. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân(chia)

Khi nhân(chia) cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương, ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Khi nhân(chia) cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm, ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Bài toán 1.

a) Nếu $x > y$. Chứng minh rằng $x + y > 2y$.

b) Cho $a > b$. Chứng minh rằng $2a + b > a + 2b$.

Hướng dẫn: Áp dụng tính chất $a > b \Rightarrow a + c > b + c$.

Bài toán 2. Với m bất kì, chứng tỏ:

a) $1 + m < 2 + m$;

b) $m - 1 < m$;

c) $m(m + 2) < (m + 1)^2$.

Hướng dẫn: Ta có thể dùng phép biến đổi tương đương và áp dụng tính chất ở phần A.

Bài toán 3.

a) Chứng minh rằng: $(x + 1)^2 \geq 4x$;

b) Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + 2 \geq 2(x + y)$;

c) Chứng minh rằng: $(x - y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.

Hướng dẫn: Áp dụng tính chất A và biến đổi tương đương.

Bài toán 4.

a) Chứng minh rằng nếu $x + 4y = 1$ thì $5(x^2 + 4y^2) \geq 1$.

b) Chứng minh rằng nếu $x + y = 1$ thì $2(x^2 + y^2) \geq 1$.

Hướng dẫn: a) Ta có $x + 4y = 1 \Rightarrow x = 1 - 4y$.

Thay x vào bất đẳng thức cần chứng minh và biến đổi tương đương.

Bài toán 5.

a) Chứng minh rằng: $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.

b) Cho $x^2 + y^2 = 1$, chứng tỏ $(x + y)^2 \leq 2$.

Hướng dẫn: a) Biến đổi tương đương.

b) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a).

Bài toán 6.

a) Chứng minh rằng: $(2x + y)^2 \leq 5(x^2 + y^2)$.

b) Chứng minh rằng: $(x + y)^2 \geq 4xy$.

Hướng dẫn: Biến đổi tương đương.

II. So sánh hai số

Bài toán 7. Cho $a - b = 5$. So sánh a và b .

Hướng dẫn: Ta có $a - b = 5 \Leftrightarrow a = b + 5$

Đưa về so sánh b và $b + 5$.

Bài toán 8.

a) So sánh a và $a + 1$.

b) Cho $x + 1 < y + 1$. So sánh x và y .

Bài toán 9.

a) So sánh $4x^2 - 4x + 5$ và 4 .

b) So sánh $x^2 + 2x + 3$ và 2 .

Hướng dẫn: Đưa về tổng hoặc hiệu bình phương.

III. Bài toán cực trị (Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức)

Bài toán 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A = x^2 - 4x + 5$;

b) $B = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$;

c) $C = x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 9$.

Hướng dẫn: Xem Lời giải bài toán 6 và 9.

Bài toán 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$M = x^2 + y^2$ biết $x + y = 1$.

Hướng dẫn: Xem bài toán 4.

Bài toán 12. Cho $x > 0; y > 0$ và $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y$

Hướng dẫn: Xem lời giải bài 5.

IV. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

Bài toán 13. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a > b$ thì $2a - 3 > 2b - 4$.

b) Nếu $a > 1$ thì $a^2 - a > 0$.

c) Nếu $0 < x < 1$ thì $x^2 < x$.

Hướng dẫn: Áp dụng tính chất: $a < b$ và $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

$$a > b \text{ và } b > c \Rightarrow a > c.$$

Bài toán 14. Cho $a > b > 0$. Chứng minh $a^2 > b^2$.

Hướng dẫn: Áp dụng tính chất: $c > 0$ và $a > 0 \Rightarrow ac > bc$ và tính chất bắc cầu.

Bài toán 15.

a) Cho $a < b$. Chứng minh $2 - 3a > 1 - 3b$.

b) Cho $a > b$. Chứng minh $2(1 - a) < 2(1 - b)$.

Bài toán 16. Cho $a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$

Bài toán 17. Cho a, b, c, d là các số dương $a > b$ và $c > d$. Chứng minh rằng $ac > bd$.

(Ta có thể viết: Nếu $a > b > 0$ và $c > d > 0$ thì $ac > bd$: Nhân vế với vế hai bất đẳng thức cùng chiều với điều kiện các vế đều dương).

Bài toán 18.

a) Cho $a > 0$ và $b > 0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

b) Cho $0 < a < b$ và $c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

c) Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

d) Cho $a > 0; b > 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

Hướng dẫn: Có thể biến đổi tương đương.

Bài toán 19. Cho $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}; b > 0; d > 0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Bài toán 20. Cho $2x + 1 < 2y + 1$. So sánh x và y ?

Hướng dẫn: Dùng phép biến đổi tương đương.

Bài toán 21. Cho $1 - 3a \geq 1 - 3b$. So sánh a và b ?

Hướng dẫn: Biến đổi tương đương.

Bài toán 22. So sánh a, b biết: $2a + 5 < 2b + 5$.

Bài toán 23. Số a là số âm hay dương, nếu: $-3a > -5a$?

Bài toán 24. Cho $x > 0, x \neq 1$. So sánh $x + \frac{1}{x}$ và 2.

Hướng dẫn: Cho $x = 3 \Rightarrow 3 + \frac{1}{3} > 2$.

Ta chứng minh: $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ($x > 0$).

V. BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Bài toán 25. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + \frac{1}{x}$; với $x > 0$.

Hướng dẫn: Xem bài toán 24.

Bài toán 26. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{-x^2 + 2x - 5}$.

Hướng dẫn: $-x^2 + 2x - 5 = -(x^2 - 2x + 1) - 4 = -4 - (x - 1)^2 \leq -4$

Bài toán 27. Cho $x + y = 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Hướng dẫn: Từ $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$. Thế y vào biểu thức P .