

Chương III. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA

BÀI 8. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khai căn bậc hai và phép nhân

Liên hệ giữa phép khai căn bậc hai và phép nhân:

Với A, B là các biểu thức không âm, ta có: $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$.

Chú ý: Kết quả trên có thể mở rộng cho nhiều biểu thức không âm, chẳng hạn:

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \cdot \sqrt{C} = \sqrt{A \cdot B \cdot C} \text{ (với } A \geq 0; B \geq 0; C \geq 0 \text{)}.$$

2. Khai căn bậc hai và phép chia

Liên hệ giữa phép khai căn bậc hai và phép chia:

Nếu A, B là các biểu thức với $A \geq 0, B > 0$ thì $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Khai căn bậc hai của một tích

Bài toán 1. Tính:

a) $\sqrt{90.4.9}$ b) $\sqrt{12.1.360}$ c) $\sqrt{2.5.14.4}$ d) $\sqrt{2^4 \cdot (-3)^2}$

Bài toán 2. Rút gọn rồi tính:

a) $\sqrt{25^2 - 24^2}$ b) $\sqrt{17^2 - 8^2}$ c) $\sqrt{117^2 - 108^2}$ d) $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$ e) $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$

Bài toán 3. Rút gọn:

a) $A = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ b) $B = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$ c) $C = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{5}$

II. Nhân các căn bậc hai

Bài toán 4. Tính:

a) $A = \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ b) $B = \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$
c) $C = \sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}}$ d) $D = \sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{3 + \sqrt{5}}$

Bài toán 5. Tính: a) $A = \sqrt{6} + \sqrt{10} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}}$ b) $B = 3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

c) $C = 4 + \sqrt{15} \cdot \sqrt{10} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}}$

III. Phân tích thành nhân tử

Bài toán 6. Phân tích thành nhân tử

a) $A = \sqrt{xy} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} - 6 \quad x \geq 0; y \geq 0$ b) $B = ab + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1$
c) $C = a - 3\sqrt{ab} + 2b$ d) $D = 2x - 7\sqrt{xy} + 5y$

Bài toán 7. Phân tích thành nhân tử

a) $A = a - \sqrt{a} - 6$ b) $B = \sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}$ c) $C = x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$

IV. Chứng minh một đẳng thức

Bài toán 8.

a) Cho $\sqrt{x+5} + \sqrt{8-x} = 5$ 1 Chứng minh rằng $\sqrt{x+5} \sqrt{8-x} = 6$. $-5 \leq x \leq 8$

b) Cho $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1$ 2 Chứng minh rằng $\sqrt{x-x^2} = 0$. $0 \leq x \leq 1$

Bài toán 9. Cho $x + \sqrt{1+x^2} \cdot y + \sqrt{1+y^2} = 1$ * Chứng minh rằng $x + y = 0$.

V. Giải phương trình

Bài toán 10. Giải phương trình

a) $\sqrt{4x-20} + \sqrt{x+5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4$ 1

b) $\sqrt{16-32x} - \sqrt{12x} = \sqrt{3x} + \sqrt{9-18x}$ 2

c) $\sqrt{x^2-9} - \sqrt{4x-12} = 0$ 3

Bài toán 11. Giải phương trình:

a) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x} = 1$ b) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$ c) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5$

VI. Chứng minh đẳng thức

Bài toán 12. Chứng minh rằng $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$ với $a \geq 0; b \geq 0$.

Bài toán 13. So sánh $\sqrt{x+y}$ và $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ($x > 0, y > 0$).

Bài toán 14 So sánh:

a) $\sqrt{3} + 2$ và $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{2014} + \sqrt{2016}$ và $2\sqrt{2015}$

Bài toán 15. Tìm x , biết:

a) $\sqrt{9x} - \sqrt{36x} + \sqrt{121x} < 8$ b) $\sqrt{x-1} + 5\sqrt{4x-4} - \sqrt{9x-9} < 4$ c) $\sqrt{x^2-4} - \sqrt{x-2} > 0$

Vậy $x > 2$.

VII. Liên hệ giữa phép khai căn bậc hai và phép chia

Bài toán 1. Tính: a) $\sqrt{\frac{6,4}{8,1}}$ b) $\sqrt{\frac{0,25}{1,44}}$ c) $\sqrt{2\frac{2}{49}}$

Bài toán 2. Rút gọn biểu thức:

a) $A = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$, với $x > 0, y \neq 0$ b) $B = 2a^2 \sqrt{\frac{b^4}{4a^2}}$, $a < 0$ c) $C = 5ab \sqrt{\frac{25a^2}{b^6}}$, $a < 0, b > 0$

Bài toán 3. Rút gọn

a) $A = \sqrt{\frac{4a^2 + 12a + 9}{b^2}}$ với $a > -\frac{3}{2}$; $b < 0$; b) $B = (x - y) \cdot \sqrt{\frac{xy}{(x - y)^2}}$ với $x < y < 0$.

c) $C = (2x - y) \cdot \sqrt{\frac{4}{4x^2 - 4xy + y^2}}$

Bài toán 4. Tính:

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$ c) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{60}}$

Bài toán 5. Tính:

a) $A = (2\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + 4\sqrt{80}) : \sqrt{5}$; b) $B = \sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{8}{\sqrt{10}} - \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

c) $C = \sqrt{\frac{7}{2}} - \frac{7\sqrt{2} - 2\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} + \frac{7}{\sqrt{14}}$

Bài toán 6. Rút gọn biểu thức :

a) $A = (3\sqrt{a^2b} - 4\sqrt{ab^2} + 5ab) : \sqrt{ab}$ với $a > 0; b > 0$.

b) $B = (\sqrt{x^2y} + \sqrt{xy^2} - 2\sqrt{xy}) : \sqrt{xy}$ (với $x > 0; y > 0$).

Bài toán 7: Rút gọn biểu thức:

a) $A = \frac{x + \sqrt{xy}}{y + \sqrt{xy}}$ ($x > 0, y > 0$)

b) $B = \frac{\sqrt{x^2y} + \sqrt{xy^2} + \sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ ($x > 0, y > 0$)

c) $C = \frac{\sqrt{am} + \sqrt{bn} - \sqrt{an} + \sqrt{bm}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ ($a, b, m, n > 0$)

Bài toán 8. Rút gọn biểu thức:

a) $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}}$ ($x > 0, x \neq 1$)

b) $B = \frac{4 - 4\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} - 35} + \frac{2}{\sqrt{x} - 7} - \frac{3}{\sqrt{x} + 5}$ ($x \geq 0, x \neq 49$)

c) $C = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} : \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ ($x > 0, y > 0, x \neq y$)

Bài toán 9. Giải phương trình:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = 2 \quad (1)$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 2 \quad (2)$$

Bài toán 10. Giải phương trình:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{x-1}} = x+3 \quad (1) \quad \text{b) } \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{\sqrt{x-3}} = x-1 \quad (2)$$

Bài toán 11.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$, (với $a > 0, b > 0$)

b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác và $P = \frac{a+b+c}{2}$ (nửa chu vi)

Chứng minh rằng: a) $\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{c}{2}$ b) $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{c}$

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy.