

Chương III. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA

Bài 7. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Căn bậc hai

* Căn bậc hai của số thực không âm a là số thực x sao cho $x^2 = a$.

Nhận xét:

- Số âm không có căn bậc hai;
- Số 0 có một căn bậc hai duy nhất là 0;
- Số dương a có đúng hai căn bậc hai đối nhau là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.
- * Tính chất của căn bậc hai: $\sqrt{a^2} = |a|$ với mọi số thực a .

2. Căn thức bậc hai:

* Định nghĩa

Căn thức bậc hai là biểu thức có dạng $\sqrt{A}$, trong đó A là một biểu thức đại số. A được gọi là biểu thức lấy căn hoặc biểu thức dưới dấu căn.

$\sqrt{A}$ xác định khi A lấy giá trị không âm, ta thường viết là $A \geq 0$. Ta nói $A \geq 0$ là điều kiện xác định (hay điều kiện có nghĩa) của $\sqrt{A}$.

* Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Tương tự như căn bậc hai của một số thực không âm, với A là một biểu thức, ta cũng có:

+ Với $A \geq 0$, ta có $\sqrt{A} \geq 0, (\sqrt{A})^2 = A$;

+ $\sqrt{A^2} = |A|$

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tìm căn bậc hai của một số

Bài 1. Tìm các căn bậc hai của $4; \frac{16}{9}; 3$.

Bài 2. Giải phương trình:

- a) $x^2 = 4$; b) $x^2 = 2$; c) $x^2 = -2$; d) $x^2 = 0$.

Hướng dẫn: Nghiệm của phương trình $x^2 = a$ (với $a \geq 0$) là các căn bậc hai của a .

Bài 3. Tìm căn bậc hai số học của số sau:

- a) 144; b) $\frac{16}{9}$; c) 1,21; d) $(-1,69)^2$.

Hướng dẫn: Gọi x (không âm) là căn bậc hai số học của số a , ta có: $x^2 = a$, ta đưa về Bài 2.

II. Phương trình dạng: $\sqrt{A} = B$

Cách giải: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$.

(Thực chất của vấn đề là ta đã bình phương hai vế, vì $(\sqrt{A})^2 = A$).

Bài 4. Giải phương trình:

a) $\sqrt{x} = 3$; b) $\sqrt{x-2} = 1$; c) $\sqrt{x} = x$; d) $\sqrt{6-4x+x^2} = x+4$.

Bài 5. Giải phương trình:

a) $\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x-1} = 0$; b) $\sqrt{x+4} - \sqrt{x^2+5x+4} = 0$.

Hướng dẫn: Ta đưa về dạng $\sqrt{A} = \sqrt{B}$

Ta có $\begin{cases} \sqrt{B} \geq 0 \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$.

Giải phương trình sau:

1) $\sqrt{x^2-9} + \sqrt{x-3} = 0$

2) $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x-1} = 0$

III. Tìm điều kiện xác định của biểu thức

Bài 6. Tìm x để căn thức sau có nghĩa.

a) $\sqrt{-2x+1}$ b) $\sqrt{\frac{1}{x+2}}$ c) $\sqrt{\frac{1}{x^2}}$ d) $\sqrt{\frac{-3}{x^2+1}}$

Hướng dẫn: $\sqrt{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$; $\frac{1}{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \neq 0$.

Bài 7. Tìm x để căn thức sau có nghĩa.

a) $\sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ b) $\sqrt{x(1-x)}$ c) $\sqrt{\frac{1+x}{2-x}}$

Hướng dẫn: Ta tìm điều kiện cho tất cả các căn bậc hai xác định.

Bài 8. Tìm x để biểu thức sau xác định :

a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$ b) $\sqrt{x^2-1}$ c) $\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

IV. Rút gọn biểu thức

Bài 9. Rút gọn:

a) $A = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ b) $B = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ c) $C = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} - \sqrt{3}$

Hướng dẫn: Áp dụng hằng đẳng thức: $\sqrt{A^2} = |A|$.

Bài 10. Rút gọn:

a) $A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ b) $B = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$

$$c) C = \sqrt{23+8\sqrt{7}} - \sqrt{7}$$

$$d) D = \sqrt{11-6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$$

Bài 11. Rút gọn biểu thức: a) $A = \sqrt{x^2 - 12x + 36} - x$

$$b) B = \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}$$

$$c) C = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

Bài 12. Tính giá trị của biểu thức

$$a) A = -4x - 2 + \sqrt{9x^2 - 6x + 1}, \text{ với } x = 2014$$

$$b) B = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4}, \text{ với } x = 2015$$

Hướng dẫn: Đưa biểu thức dưới dấu căn trở thành bình phương một tổng hoặc một hiệu và áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

V. Giải phương trình

Bài 13. Giải phương trình

$$a) \sqrt{x^2} = 5$$

$$b) \sqrt{25x^2} = 10$$

$$c) \sqrt{9x^2} = 2x + 1$$

$$d) \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 1$$

Hướng dẫn: Biến đổi biểu thức dưới dấu căn trở thành bình phương của một tổng hoặc một hiệu và áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

VI. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

Bài 14: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

$$a) \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$$

$$b) \sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}}$$

Hướng dẫn: Áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

và $|A| + |B| \geq |A + B|$ dấu "=" xảy ra $\Rightarrow AB \geq 0$ (A và B cùng dấu hoặc bằng 0).