

Bài 9. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

- Nếu a là một số và b là một số không âm thì $\sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}$.
- Chú ý: Phép biến đổi trên gọi là phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

- Nếu a và b là hai số không âm thì $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.
- Nếu a là số âm và b là số không âm thì $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.

Chú ý: Các phép biến đổi trên gọi là phép đưa thừa số vào trong dấu căn.

3. Trục căn thức ở mẫu

- Với các biểu thức A, B và $B > 0$, ta có $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.

- Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, A \neq B^2$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A+B}} = \frac{C(\sqrt{A}-B)}{A-B^2}, \frac{C}{\sqrt{A}-B} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2}.$$

- Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B > 0, A \neq B$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A+B}, \frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}.$$

4. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Khi rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần phối hợp các phép tính (cộng, trừ, nhân, chia) và các phép biến đổi đã học (đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn, khử mẫu của biểu thức lấy căn, trục căn thức ở mẫu).

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Bài toán 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{180x^2}; x < 0$ b) $\sqrt{25x^3}; x \geq 0$ c) $\sqrt{9a^2b}; a \geq 0; b \geq 0$ d) $\sqrt{72x^4y^2}; y < 0$

Bài toán 2. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $A = \sqrt{22+12\sqrt{2}}$ b) $B = \sqrt{32+12\sqrt{7}}$ c) $C = \sqrt{18-6\sqrt{5}}$

Hướng dẫn:

- a) Áp dụng phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn: $\sqrt{A^2 \cdot B} = |A| \sqrt{B}; B \geq 0$

Ta viết $22+12\sqrt{2} = 2(11+6\sqrt{2}) = 2(3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2)$

Bài toán 3. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

$$a) A = \sqrt{\frac{8}{x^2 - 4xy + 4y^2}} \text{ với } x < 2y$$

$$b) B = \frac{1}{1-5x} \sqrt{3x^2(25x^2 - 10x + 1)} \text{ với } 0 \leq x < \frac{1}{5}$$

Bài toán 4. Rút gọn biểu thức:

$$a) A = \sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{49a} \text{ với } a \geq 0.$$

$$b) B = 5\sqrt{1+x} + \sqrt{4x+4} - \sqrt{9+9x} \text{ với } x \geq -1.$$

Hướng dẫn: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn và rút gọn.

Bài toán 5. Rút gọn:

$$a) A = \frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \text{ với } (a > 0; b > 0)$$

$$b) B = \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{xy}) \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x-y)(\sqrt{x^3}+x)} \text{ với } (x > 0; y > 0, x \neq y).$$

Hướng dẫn:

$$\text{Áp dụng: } \sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = |a|\sqrt{a} \text{ hoặc } \sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = a\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 \sqrt{a} = (\sqrt{a})^3$$

II. Đưa thừa số vào trong dấu căn

Bài toán 6. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

$$a) 3\sqrt{2}$$

$$b) 2\sqrt{6}$$

$$c) -3\sqrt{5}$$

$$d) -4\sqrt{2}$$

Hướng dẫn:

$$\text{Áp dụng } A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B} \ (A \geq 0, B \geq 0); \quad A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B} \ (A < 0, B \geq 0).$$

Bài toán 7. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

$$a) a\sqrt{13}, \ a < 0$$

$$b) a\sqrt{\frac{7}{a}}; \ a > 0$$

$$c) x\sqrt{\frac{-23}{x}}; \ x < 0$$

$$d) 2x\sqrt{\frac{y}{2x}}; \ x > 0, y \geq 0$$

Hướng dẫn:

$$\text{Áp dụng } A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B} \ (A \geq 0, B \geq 0); \quad A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B} \ (A < 0; B \geq 0)$$

III. Giải phương trình

Bài toán 8. Giải phương trình:

$$a) 2\sqrt{3x} - \sqrt{48x} + \sqrt{108x} + \sqrt{3x} = 5 \quad (1)$$

$$b) \sqrt{50x-25} + \sqrt{8x-4} - 3\sqrt{x} = \sqrt{72x-36} - \sqrt{4x} \quad (2)$$

$$c) \sqrt{x^2-9} - \sqrt{4x-12} = 0 \quad (3)$$

$$d) \sqrt{2x^2+8x+8} + \sqrt{x+2} = 0 \quad (4)$$

Hướng dẫn: Rút gọn biểu thức bằng cách đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

IV. Giải bất phương trình

Bài toán 9. Giải bất phương trình:

$$a) \sqrt{9x} - \sqrt{36x} + \sqrt{121x} < 8 \quad (1)$$

$$b) \sqrt{x-1} + 5\sqrt{4x-4} - \sqrt{9x-9} < 4 \quad (2)$$

$$\text{c) } \sqrt{2x^2 - 12x + 18} + \sqrt{x - 3} > 0 \quad (3) \quad \text{d) } \sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{4x + 8} > 0 \quad (4)$$

Hướng dẫn: Biến đổi biểu thức như bài toán 8 .

Bài toán 10. So sánh:

$$\text{a) } 2\sqrt{3} \text{ và } 3\sqrt{2} \quad \text{b) } 4\sqrt{3} \text{ và } 5\sqrt{2} \quad \text{c) } -6\sqrt{2} \text{ và } -5\sqrt{3} .$$

Hướng dẫn: Đưa thừa số vào trong dấu căn.

V. Trục căn thức ở mẫu

Bài toán 11. Trục căn thức ở mẫu:

$$\text{a) } \frac{5}{3\sqrt{8}} \quad \text{b) } \frac{1}{3\sqrt{20}} \quad \text{c) } \frac{2\sqrt{2} + 2}{5\sqrt{2}} \quad \text{d) } \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} (B > 0)$

Bài toán 12. Trục căn thức ở mẫu:

$$\text{a) } \frac{2}{\sqrt{a}} \quad \text{b) } \frac{a + b\sqrt{a}}{b\sqrt{a}} \quad \text{c) } \frac{a}{\sqrt{2a^3}} \quad \text{d) } \frac{2a^2}{\sqrt{2a^5}}$$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức: $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} (B > 0)$

Bài toán 13. Trục căn thức ở mẫu:

$$\text{a) } \frac{3}{\sqrt{3} + 1} \quad \text{b) } \frac{2}{\sqrt{2} - 1} \quad \text{c) } \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \quad \text{d) } \frac{2\sqrt{10} - 5}{4 - \sqrt{10}} \quad \text{e) } \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{8} - 2}$$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2} (A \geq 0; A \neq B^2)$.

Bài toán 14. Trục căn thức ở mẫu:

$$\text{a) } \frac{a}{3 + \sqrt{a}} \quad \text{b) } \frac{p}{2\sqrt{p} - 1} \quad \text{c) } \frac{a + \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} \quad \text{d) } \frac{p - 2\sqrt{p}}{\sqrt{p} - 2}$$

Bài toán 15. Trục căn thức ở mẫu:

$$\text{a) } \frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} \quad \text{b) } \frac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} \quad \text{c) } \frac{3}{\sqrt{10} + \sqrt{7}} \quad \text{d) } \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \quad \text{e) } \frac{10}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

Bài toán 16. Trục căn thức ở mẫu

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} (a > b > 0) & \quad \text{b) } \frac{2ab}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} (a > 0, b > 0) \\ \text{c) } \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} (a \geq 0) & \quad \text{d) } \frac{b}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} (a > b > 0) \end{aligned}$$

Bài toán 17 .

$$\text{a) } \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} \quad \text{b) } \frac{a}{a\sqrt{a} + 1} (a > 0, b \neq 1) \quad \text{c) } \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \quad \text{d) } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{2}} - 1}$$

Bài toán 18. So sánh (không dùng máy tính bỏ túi và bảng số)

a) $\sqrt{12} - \sqrt{11}$ và $\sqrt{11} - \sqrt{10}$

b) $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ và $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$.

Hướng dẫn: Xét các biểu thức liên hợp của các biểu thức đã cho, chẳng hạn: $\sqrt{12} - \sqrt{11}$ và $\sqrt{12} + \sqrt{11}, \sqrt{3} - 1$ và $\sqrt{3} + 1$.

Bài toán 19. Chứng minh rằng:

a) $\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} \geq -1, \forall x \geq 1$

b) $\frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}} \geq \sqrt{2}, \forall x \geq 1, x \neq 3$

c) $\frac{y}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}} < \frac{z}{\sqrt{x+z}-\sqrt{x-z}}, \forall x > y > z > 0$

Bài toán 20. Rút gọn:

a) $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{10}}$

b) $B = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{100}}$

Hướng dẫn: Trục căn thức ở mẫu số của mỗi số hạng.

Bài toán tương tự.

Rút gọn:

a) $P = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}+13} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2017}}$

b) $Q = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2014}}$

VI. Giải phương trình

Bài toán 21.

a) $\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} = 2$ (1)
(3)

b) $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{2x+1})^2} = 2x+6$ (2)

c) $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} = x-4$

VII. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Bài toán 23. Rút gọn:

a) $A = \left(\frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right)^2 \quad (x \geq 0 \text{ và } x \neq 1).$

b) $B = \left(\frac{2-a\sqrt{a}}{2-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{2-\sqrt{a}}{2-a} \right) \quad (a \geq 0; a \neq 2; a \neq 4).$

c) $C = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0, x \neq 1).$

Hướng dẫn: Thực hiện phép tính trong dấu ngoặc trước.

Bài toán 24. Rút gọn biểu thức:

$$a) A = \left(\frac{3x - 3\sqrt{x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \quad (x \geq 0, x \neq 1)$$

$$b) B = \frac{x\sqrt{x} - 3}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} + 3}{3 - \sqrt{x}} \quad (x \geq 0, x \neq 9)$$

$$c) C = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}} \quad (x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9)$$

Bài toán 25. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1}$.

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức P .

b) Rút gọn biểu thức P .

c) Tìm x để $P = 10$.

Bài toán 26. Cho biểu thức $A = \frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} - \frac{a^2+1}{1-a^2}$

a) Tìm điều kiện xác định của A . b) Rút gọn biểu thức A . c) Tìm giá trị của a ; biết $A < \frac{1}{3}$.

Bài toán 27. $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

a) Tìm điều kiện có nghĩa của A .

b) Rút gọn A .

c) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Bài toán 28. Giải phương trình:

a) $\sqrt{2x^2 - 4x + 1} = x - 1$ (1)

b) $\sqrt{4x - 20} - 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} = \sqrt{1-x}$ (2)

Áp dụng: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

Bài toán 29. Giải phương trình $\sqrt{x-5} + \sqrt{7-x} = 2$ (*)

Bài toán 30. Giải phương trình: $\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} + \sqrt{(1+x)(3-x)} = 2$

Hướng dẫn: Để ý đến biểu thức dưới các dấu căn, ta đặt ẩn phụ:

$u = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}$, từ đó tính $\sqrt{(1+x)(3-x)}$ qua u