

BÀI 19. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn.

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là hệ số và $a \neq 0$.

2. Cách giải phương trình bậc hai một ẩn có dạng đặc biệt

$$ax^2 + bx = 0; ax^2 + c = 0.$$

Dùng phương pháp đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức để đưa về trái về một bình phương.

- Lưu ý:**
- Nếu $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.
 - Nếu $A^2 = B$ ($B \geq 0$) thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$.

3. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý:

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), với $b = 2b'$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.
- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.
- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Các công thức ở trên gọi là công thức nghiệm thu gọn.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tìm các hệ số a, b, c của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Bài 1. Tìm các hệ số a, b , của phương trình:

a) $x^2 - 8x + 2 = 0$

b) $5x^2 + 2x = 4 - x$

c) $x^2 + \sqrt{2}x = 0$

d) $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$

e) $x^2 + 4x = 4 - m^2$

f) $x^2 + m(x - 1) = 1 - m$

Bài 2. Tìm các hệ số a, b, c của phương trình.

a) $2x^2 - (1 - 2a)x + a - 1 = 0$

b) $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$

c) $3x^2 + 2(m - 3)x + 2m + 1 = 0$

d) $-x^2 + (m - 2)x + 2 = 0$

Bài 3. Tìm các hệ số a, b, c của phương trình:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12}$ (1)

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 2$ (2)

c) $(x+1)\left(\frac{1}{x} - 2\right) = 5$ (3)

II. Giải phương trình bậc hai khuyết

Bài 4. Giải phương trình sau:

a) $2x^2 - \sqrt{2}x = 0$ (1)

b) $x^2 - 4 = 0$ (2)

c) $3x^2 = 27$ (3)

d) $x^2 + 1 = 0$ (4)

Bài 5. Cho phương trình $x^2 + mx - 35 = 0$.

a) Tìm m biết rằng phương trình có một nghiệm bằng 7.

b) Giải phương trình với m vừa tìm được.

Hướng dẫn: $x = 7$ là nghiệm của phương trình $x^2 + mx - 35 = 0$ nên thay $x = 7$ vào phương trình, ta được: $7^2 + m \cdot 7 - 35 = 0$. Từ đó tìm được m .

Bài 6. Cho phương trình $x^2 + px + q = 0$. Tìm p, q biết rằng phương trình có hai nghiệm $x = 3$ và $x = 4$

Bài tập tương tự

Tìm p, q để nghiệm của phương trình $x^2 - 4 = 0$ cũng là nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$.

Bài 7. Giải phương trình.

a) $x^2 - 5x - 6 = 0$ (1)

b) $x^2 + 3x - 4 = 0$ (2)

Bài 8. Tìm tọa độ giao điểm của các đồ thị hàm số sau: $y = 4x^2$; $y = 4x + 3$.

Bài 9. Tìm m để phương trình $x^2 + 2mx + 1 = 0$ có nghiệm.

Bài 10. Tìm m để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung: $x^2 - 1 = 0$ và $x^2 - mx = 0$.

Hướng dẫn: Tìm nghiệm của từng phương trình.

III. Giải phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Bài 11. Giải phương trình:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

c) $2x^2 - 7x + 2 = 0$

Bài 12. Giải phương trình:

a) $9x^2 - 30x + 225 = 0$

b) $(2x - 3)^2 = 11x - 19$

c) $3(x^2 - 1) = 8x$

d) $9x^2 - 30x + 25 = 0$

e) $5x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$

Bài 13. Giải phương trình:

a) $(2x + 1)^2 = 8x$ (1)

b) $(3x - 1)(x + 1) = 15$ (2)

c) $2x^2 + 3x - (x - 1)(x - 2) = 0$ (3)

IV. Điều kiện phương trình có nghiệm và số nghiệm của phương trình

Bài 14. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$$x^2 + 2x + m - 2 = 0$$

Bài 15. Tìm m để phương trình $mx^2 + (2m-1)x + m + 2 = 0$ có nghiệm.

Bài 16. Tìm m để phương trình $(m-1)x^2 + (m+4)x + m + 7 = 0$ có nghiệm duy nhất.

Bài 17. Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 2 = 0$ có nghiệm kép.

Bài 18. Tìm m để phương trình $x^2 + (2m+1)x + m^2 = 0$ có nghiệm kép và tính nghiệm kép với m vừa tìm được.

Bài 19. Chứng minh rằng phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$ luôn luôn có nghiệm với mọi m .

Bài 20. Chứng tỏ phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có các hệ số a và c trái dấu thì luôn có nghiệm.

V. Giải và biện luận phương trình có tham số

Bài 21. Giải và biện luận phương trình sau

a) $x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$ (1)

b) $mx^2 + (2m-1)x + m + 2 = 0$ (2)

Bài 22. Giải phương trình:

a) $x^2 - 2(2m+1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$

b) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$

VI. Vị trí tương đối của parabol $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Bài 23. Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 3$

Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d)

Bài 24. Chứng tỏ rằng parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - 1$ tiếp xúc nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm.

Bài tập tương tự. Vẽ parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - 1$. Tìm tọa độ giao điểm.

Bài 25. Cho $(P): y = 2x^2$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(0; -2)$ và tiếp xúc với (P) .

Bài 26. Cho parabol $(P): y = \frac{3}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m$. Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Bài 27. Cho $(P): y = -\frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $(d): y = x - 4$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

b) Viết phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và tiếp xúc với (P) .

Bài 28. Cho $a + b = 1$.

a) Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

b) Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$.

Bài 29. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

Hướng dẫn: Biến đổi biểu thức về dạng $y(x^2 + 1) = 2x \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$ (*)

Tìm điều kiện để phương trình bậc hai theo x có nghiệm.

Bài 30. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $y = \sqrt{x+1} - x$.

Hướng dẫn: Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x+1 \Rightarrow x = u^2 - 1 (x \geq -1 \Rightarrow u \geq 0)$.

Ta xét như bài toán 29.

VII. Công thức nghiệm thu gọn

Bài 29. Giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn.

a) $5x^2 + 2x - 16 = 0$ (1)

b) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 6 = 0$ (2)

c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 1 = 0$ (3)

d) $\sqrt{2}x^2 - 2(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2} - 2 = 0$ (4)

Hướng dẫn: Nhận xét về hệ số b , tính $b' = \frac{b}{2}$ và $\Delta' = b'^2 - ac$

Bài 32. Với giá trị nào của m phương trình sau đây vô nghiệm.

a) $3x^2 - 2x + m = 0$ (1)

b) $5x^2 - 18x + m = 0$ (2)

c) $m^2 - 6x + 1 = 0$ (3)

d) $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$ (4)

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm $\Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

VII. Công thức nghiệm thu gọn

Bài 31. Giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn.

a) $5x^2 + 2x - 16 = 0$

b) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 6 = 0$

c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 1 = 0$

d) $\sqrt{2}x^2 - 2(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2} - 2 = 0$

Hướng dẫn: Nhận xét về hệ số b , tính $b' = \frac{b}{2}$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

Bài 32. Với giá trị nào của m phương trình sau đây vô nghiệm:

a) $3x^2 - 2x + m = 0$ (1)

b) $5x^2 + 18x + m = 0$ (2)

c) $m^2 - 6x + 1 = 0$ (3)

d) $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$ (4)

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm $\Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

Bài tập tương tự

Tìm m để các phương trình trên có nghiệm kép, có hai nghiệm phân biệt hoặc có nghiệm.

Bài 33. Tìm m để phương trình sau có nghiệm kép:

$$a) 5x^2 + 2mx - 2m + 5 = 0 \quad (1)$$

$$b) mx^2 - 4(m-1)x - 8 = 0 \quad (2)$$

$$c) mx^2 - 100x + m = 0 \quad (3)$$

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$.

Nhận xét: Với các phương trình đã cho, ta có thể tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 34. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt.

$$a) (m+1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0 \quad (1)$$

$$b) x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0 \quad (2)$$

$$c) x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0 \quad (3)$$

$$d) x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m - 1 = 0 \quad (4)$$

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

Bài tập tương tự bài d):

"Tìm m để phương trình (4) có hai nghiệm".

Hướng dẫn: Phương trình (4) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -2.$$

Ta hãy so sánh với bài toán tương tự bài a):

"Tìm m để phương trình (1) có nghiệm".

Chú ý: Khi xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, ta phải xét đến hệ số a trước hết ví dụ bài toán trên: $a = m + 1$. Nếu không xét trường hợp $m + 1 = 0$ ta sẽ có kết luận không chính xác.

Bài 35. Tìm m để parabol (P): $y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - 2m - 1$ tiếp xúc nhau.

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d), sau đó tìm điều kiện để phương trình có nghiệm kép.

Nhận xét: Bài: "Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt" được giải tương tự.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m+1)^2 > 0 \Leftrightarrow m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$$

Bài 36. Tìm m để parabol (P): $y = mx^2 (m \neq 0)$ và đường thẳng $y = 2x - 1$ tiếp xúc nhau.

Hướng dẫn: Xem bài toán 35.

Bài 37. Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x + 3$.

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

Bài 38. Cho parabol (P): $y = \frac{1}{x}x^2$ và đường thẳng (d): $y = -x + m$. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt?

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d).

Bài 39. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh $|5x + 12y| \leq 13$.

Hướng dẫn: Đặt $m = 5x + 12y \Rightarrow x = \frac{m - 12y}{5}$.

Thế vào biểu thức $x^2 + y^2 = 1$, ta được phương trình bậc hai của y và m là tham số.

Bài 40. Cho $4x + y = 1$. Chứng minh rằng $4x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}$.

Hướng dẫn: Đặt $m = 4x^2 + y^2$.

Từ $4x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 4x$, và thế y vào đẳng thức $m = 4x^2 + y^2$. Ta được phương trình bậc hai của x , tham số m . Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

∞ HẾT ∞