

Bài 20. ĐỊNH LÝ VI-ET VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1) Định lý Vi-et.

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$

2) Áp dụng định lý Vi-et để tính nhẩm nghiệm.

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$:

*) Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = \frac{c}{a}$.

*) Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

3) Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $x^2 - Sx + P = 0$.

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Biểu thức đối xứng với các nghiệm $(x_1^2 + x_2^2; x_1^3 + x_2^3; x_1^4 + x_2^4)$

Bài 1. Cho phương trình $x^2 - x - 10 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và tính $x_1^2 + x_2^2$.

Hướng dẫn: $a = 1; c = -10 \Rightarrow ac < 0$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Bài 2. Cho phương trình $2x^2 - 3x - 6 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Tính $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^3 + x_2^3$.

Hướng dẫn: Xem nhận xét ở Bài 1.

Bài 3. Cho phương trình $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $M = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$, với $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Hướng dẫn: Chứng minh phương trình có nghiệm.

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - x + m - 1 = 0$ (*).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$.

b) Hãy tính $x_1^2 + x_2^2$ theo m .

Hướng dẫn:

*) Phương trình đã cho có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ (không cần hai nghiệm phân biệt).

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Bài 5. Theo phương trình $3x^2 + 2x - 6 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$; trong đó $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Bài 6. Cho phương trình $3x^2 - 7x - 4 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, hãy tính.

a) $A = |x_1 - x_2|$

b) $B = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$

Hướng dẫn:

1. Chứng tỏ phương trình có nghiệm.

2. Áp dụng định lý Vi-et, tính:

$$A^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2. \text{ Từ đó tính } A.$$

Bài 7. Cho phương trình $x^2 - 2x + m + 2 = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Hướng dẫn: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm, áp dụng hệ thức Viète tính $x_1^2 + x_2^2$ qua $x_1 + x_2$ và x_1x_2

Bài 8. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ trong đó $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Hướng dẫn: Trước hết phải tìm điều kiện để phương trình có nghiệm sau đó áp dụng hệ thức Viète để tính $x_1^2 + x_2^2$ qua các hệ số.

II. Biểu thức không đối xứng với các nghiệm

Bài 9. Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $3x_1 + 2x_2 = 1$

Hướng dẫn: Biểu thức $3x_1 + 2x_2$ gọi là không đối xứng. Áp dụng hệ thức Viète, tính

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1x_2 = \frac{c}{a}. \text{ Ta có hệ phương trình, từ đó tìm được } m$$

Bài 10. Tìm m để phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 4$

Hướng dẫn: Xem lời giải Bài 9.

III. Tính nhẩm các nghiệm của phương trình bậc hai

Bài 11. Giải phương trình:

a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ (1)

b) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ (2)

c) $mx^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0$ (3)

d) $(1 - 2m)x^2 + (2m + 1)x - 2 = 0$ (4)

Hướng dẫn:

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$.
- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm: $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$.

Bài 12. Giải phương trình:

a) $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$ (1)

b) $mx^2 + 2(m+1)x + m + 2 = 0$ ($m \neq 0$) (2)

c) $(5 + \sqrt{2})x^2 - (\sqrt{2} - 5)x - 10 = 0$ (3)

Hướng dẫn: Xem hướng dẫn Bài 11.**IV. Xét dấu các nghiệm**

Ta cần nhớ kết quả như sau:

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).Hai nghiệm trái dấu: $(x_1 < 0 < x_2) \Leftrightarrow ac < 0$.

$$\text{Hai nghiệm phân biệt dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Hai nghiệm phân biệt âm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$$

Bài 13. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm trái dấu:

$x^2 + 4x + m = 0$

Hướng dẫn: Xét $ac < 0 \Leftrightarrow -4ac > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > b^2 \geq 0$.Vậy $\Delta > 0$. Lại có $ac < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow x_1 x_2 < 0$

Vậy hai nghiệm trái dấu.

Bài 14. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt dương

$x^2 - 2x + m = 0$

V. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng**Bài 18.** Tìm hai số u và v biết $u + v = 1$ và $u \cdot v = -2$.**Hướng dẫn:** Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm phương trình bậc hai $x^2 - Sx + P = 0$.**Nhận xét:** Ta có thể giải bài toán sau: "Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là -1 và 2 ."

Bài toán tương tự.

Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là 3 và -5.

Bài 19. Tìm hai số u, v ; biết $u + v = 12$; $uv = 28$ và $u > v$.

Bài 20. Cho phương trình $x^2 + x - 3 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$.

Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

Hướng dẫn: Xem nhận xét sau Bài 18.

Bài 21. Cho phương trình $x^2 + mx - 5 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Lập phương trình có hai nghiệm là $-x_1$ và $-x_2$.

Bài 22. Tìm m để hai phương trình sau tương đương: $x^2 + mx - 2 = 0$ và $x^2 - 2x + m = 0$ có tập hợp nghiệm trùng nhau.

Hướng dẫn:

1. Hai phương trình bậc hai cùng vô nghiệm hoặc:

2. Hai phương trình bậc hai cùng có nghiệm và tổng; tích hai nghiệm của từng phương trình phải bằng nhau.

VI. Phân tích thành nhân tử

Bài 23. Tam thức $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Chứng minh: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Bài 24. Rút gọn phân thức: $P = \frac{x^2 - 9x + 8}{2x^2 - 3x + 1}$

Hướng dẫn: Phân tích các tam thức ở tử số và mẫu số thành nhân tử.

Bài 25. Rút gọn phân thức: $P = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 5\sqrt{x} + 6}$

Hướng dẫn: Đặt $a = \sqrt{x}$; $a \geq 0 \Rightarrow x = a^2$. Rút gọn phân thức theo a .

VII. Biết một nghiệm của phương trình, tìm nghiệm còn lại

Bài 26. Chứng tỏ phương trình $3x^2 + 2x - 21 = 0$ có một nghiệm là -3.

Tìm nghiệm kia.

Hướng dẫn: Thay $x = -3$ vào phương trình.

Dùng hệ thức: $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ để tìm x_2 ($x_1 = -3$) (hoặc $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$).

Bài 27. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có một nghiệm là 2. Tìm nghiệm còn lại.

Hướng dẫn: Xem Bài 26.

Bài 28. Cho phương trình $4x^2 + 3x + 3m - m^2 = n$ có một nghiệm $x_1 = -2$. Tìm x_2 và m .

Hướng dẫn: Dùng hệ thức Viète: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ để tìm x_2 ; dùng hệ thức $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ để tìm m .

☞ HẾT ☞